CORSO DI GEOMETRIA
GEOMETRIA AFFINE
A.A. 2021/2022
PROF. VALENTINA BEORCHIA

INDICE

1. SPAZI AFFINI

Definizione 1.1. *Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Uno spazio affine su V è un insieme non vuoto $\mathbb{A}$, i cui elementi si dicono i* **punti di** $\mathbb{A}$*, ed una funzione*

$$\sigma : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to V, \qquad \sigma(P, R) = \overrightarrow{PR},$$

tale che valgano i seguenti assiomi:

- (SA1) *per ogni $P \in \mathbb{A}$ e per ogni $v \in V$, $\exists!\ R \in \mathbb{A}$ tale che*
$$v = \overrightarrow{PR};$$
- (SA2) *per ogni terna di punti (non necessariamente distinti) $P, Q, R \in \mathbb{A}$ si ha*
$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

Proposizione 1.2. *Dai due assiomi di spazio affine si hanno le seguenti proprietà:*

(1) per ogni $P \in \mathbb{A}$ si ha $\overrightarrow{PP} = 0 \in V$;
(2) per ogni $P, R \in \mathbb{A}$, si ha $\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR}$;
(3) per ogni punto $P \in \mathbb{A}$, la funzione

$$f_P : \mathbb{A} \to V, \quad f_P(Q) = \overrightarrow{PQ}$$

è una biiezione.

Dimostrazione. (1) Dall'assioma (SA2), ponendo $P = Q = R$, si ha $\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$, e sommando ad entrambi i membri il vettore $-\overrightarrow{PP}$ si ha la tesi.
(2) Dall'assioma (SA2), ponendo $R = P$, si ha $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = 0$ per il primo punto, quindi $\overrightarrow{QP}$ è il vettore opposto di $\overrightarrow{PQ}$.
(3) la tesi segue direttamente dall'assioma (SA1).

□

Definizione 1.3. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V di dimensione finita. Allora definiamo la* **dimensione di** $\mathbb{A}$ *come*

$$\dim\ \mathbb{A} := \dim\ V.$$

Se

- $\dim\ \mathbb{A} = 1$, *allora* $\mathbb{A}$ *si dice* **retta affine***;*
- $\dim\ \mathbb{A} = 2$, *allora* $\mathbb{A}$ *si dice* **piano affine***.*

Definizione 1.4. *Se $V = \mathbb{K}^n$, possiamo definire una struttura di spazio affine su $\mathbb{K}^n$ stesso nel modo seguente:*

$$\sigma : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n, \quad \sigma((p_1, p_2, \dots, p_n), (q_1, q_2, \dots, q_n)) := \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ \vdots \\ q_n - p_n \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ}.$$

Si verifica facilmente che σ verifica i due assiomi. Lo spazio affine così definito verrà indicato con il simbolo

$$\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}.$$

Definizione 1.5. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V. Un* **riferimento affine per** $\mathbb{A}$ *è il dato di:*

- *un punto $O \in \mathbb{A}$;*
- *una base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ di V.*

Il punto O si dice **origine del riferimento***.*

Dato un punto $P \in \mathbb{A}$ qualsiasi, possiamo definire le **coordinate di** P *come le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ nella base $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, cioè se*

$$\overrightarrow{OP} = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n,$$

definiamo l'n-upla $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ come coordinate di P.

Esempi 1.6. *Se $\mathbb{A}$ è una retta affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da un vettore non nullo $v \in V$.*

Se $\mathbb{A}$ è un piano affine, un riferimento affine è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ e da due vettori non nullo e non proporzionali $v_1, v_2 \in V$.

Definizione 1.7. *In $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ possiamo scegliere il seguente riferimrnto:*

- *$O \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$;*
- *la base canonica di $\mathbb{K}^n$:*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Questo riferimento si dice **riferimento affine canonico di** $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$*.*

2. Sottospazi affini e loro equazioni cartesiane e parametriche

Definizione 2.1. *Sia $\mathbb{A}$ spazio affine su V. Fissati*

- *un punto $Q \in \mathbb{A}$, e*
- *un sottospazio vettoriale $W \subseteq V$,*

il **sottospazio affine passante per** Q **e parallelo a** W *è il sootinsieme di* $\mathbb{A}$ *definito*

$$S = \{P \in \mathbb{A} \mid \overrightarrow{QP} \in W\}.$$

Il sottospazio $W \subseteq V$ *si chiama* **giacitura di** S.

Proposizione 2.2. *Dalla definizione si hanno le seguenti proprietà:*

(1) se S *è un sottospazio affine passante per* Q *e di giacitura* W*, allora*
$$Q \in S.$$
(2) Per ogni coppia di punti $P_1, P_2 \in S$*, si ha*
$$\overrightarrow{P_1P_2} \in W.$$
(3) S *ha una struttura di spazio affine su* W.

Definizione 2.3. *Sia* $S \subseteq \mathbb{A}$ *un sottospazio affine di giacitura* W*. Definiamo* $\dim S := \dim W$.
Se
$$\dim S = \dim \mathbb{A} - 1,$$
allora S *si dice* **iperpiano** *di* $\mathbb{A}$.

Vediamo ora due modi per descrivere i sottospazi affini, cioè tramite equazioni cartesiane ed equazioni parametriche.

Teorema 2.4. *Sia* $A \cdot x = b$ *un sistema di* m *equazioni lineari di ordine* n *a coefficienti nel campo* $\mathbb{K}$*. Se* $A \cdot x = b$ *è compatibile, allora l'insieme delle sue soluzioni*
$$S = \{s \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot s = b\}$$
è un sottospazio affine di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *la cui giacitura è il sottospazio vettoriale* W *di* $\mathbb{K}^n$ *formato dalle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:*
$$W = \{s \in \mathbb{K}^n \mid A \cdot s = 0\}.$$
In tal caso $\dim(S) = n - rg(A)$*, e per ogni* $\widetilde{s} \in S$*, il sottoinsieme* S *coincide con il sottospazio affine di* $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *passante per* $\widetilde{s}$ *e parallelo a* W.

Dimostrazione. Poichè il sistema lineare è compatibile, S non è vuoto. Sia dunque $\widetilde{s}$ una sua soluzione. Per il teorema di struttura dell'insieme delle soluzioni di un sistema lineare, ogni altra soluzione s si può scrivere nella forma
$$s = \widetilde{s} + w, \quad w \in W.$$
Quindi si ha
$$s \in S \iff s - \widetilde{s} \in W \iff \overrightarrow{\widetilde{s}\, s} \in W.$$
Per definizione, S risulta il sottospazio affine di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ passante per $\widetilde{s}$ e di giacitura W.

Infine, per il Teorema di Dimensione, $\dim W = n - \mathrm{rgA} = \dim S$. $\square$

Definizione 2.5. *Sia* $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ *un sottospazio affine. Un* **sistema di equazioni cartesiane per** S *è un qualunque sistema di equazioni lineari* $Ax = b$*, tale che*
$$S = \{s \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid A \cdot s = b\}.$$

Osservazione 2.6. *(1) Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni Cartesiane. Infatti, se $S = \{s \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}} \mid A \cdot s = b\}$, allora per ogni sistema di equazioni lineari $\widetilde{A} \cdot x = \widetilde{b}$ equivalente ad $A \cdot x = b$, le equazioni di $\widetilde{A} \cdot x = \widetilde{b}$ sono delle equazioni Cartesiane per S.*

(2) Sia $A \cdot x = b$ un sistema di equazioni cartesiane per il sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$. Allora il punto $(0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ appartiene ad S se e solo se $b = 0$, cioè se e solo se il sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$ è omogeneo.

(3) Ogni iperpiano di $\mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ può essere descritto da una equazione lineare del tipo

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = d, \tag{2.1}$$

con $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli. Infatti, se $A \cdot x = b$ è un sistema di equazioni cartesiane per S, abbiamo che

$$\dim(S) = n - 1 = n - \mathrm{rg}\,(A).$$

Da questo segue che

$$\mathrm{rg}\,(A) = 1.$$

Siccome il sistema lineare $A \cdot x = b$ ʻe compatibile, per il Teorema di Rouché - Capelli si ha

$$\mathrm{rg}\,(A|b) = \mathrm{rg}\,(A) = 1.$$

Sia

$$\widetilde{A} \cdot x = \widetilde{b}$$

un sistema lineare equivalente con $\widetilde{A}$ a scala. Siccome

$$\mathrm{rg}\,(\widetilde{A}|\widetilde{b}) = \mathrm{rg}\,(A|b) = 1,$$

*la matrice $(\widetilde{A}|\widetilde{b})$ ha un'unica riga non nulla, che corrisponde a una equazione lineare del tipo (**??**).*

Vediamo ora come si possono descrivere i sottospazi affini tramite equazioni parametriche.

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ is sottospazio affine passante per un punto $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ e di giacitura $W \subseteq \mathbb{K}^n$. Sia

$$\{w_1, \dots, w_m\}$$

una base del sottospazio vettoriale W. Fissiamo le componenti dei vettori w_i (come elementi di $\mathbb{K}^n$)

$$w_1 = \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \quad w_m = \begin{pmatrix} w_{1m} \\ w_{2m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix}.$$

Allora abbiamo

$$P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S \iff \overrightarrow{QP} \in W \iff$$

$$\iff \exists t_1, t_2, \dots, t_m \in \mathbb{K} \;:\; \overrightarrow{QP} = t_1w_1 + t_2w_2 + \cdots + t_mw_m \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} w_{11} \\ w_{21} \\ \vdots \\ w_{n1} \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} w_{12} \\ w_{22} \\ \vdots \\ w_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + t_m \begin{pmatrix} w_{1m} \\ w_{2m} \\ \vdots \\ w_{nm} \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \exists t_1, t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{K} \ : \ \begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \cdots + t_m w_{1m} \\ t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \cdots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \cdots + t_m w_{nm} \end{pmatrix}.$$

Definizione 2.7. *Usando le stesse notazioni di cui sopra, le equazioni*

$$\left\{ \begin{array}{c} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \cdots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \cdots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \cdots + t_m w_{nm} \end{array} \right. \tag{2.2}$$

si dicono **equazioni parametriche di** S.

Osservazione 2.8. *Un sottospazio affine $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ può essere descritto da diversi sistemi di equazioni parametriche.*

3. Parallelismo, incidenza e sottospazi affini sghembi

Definizione 3.1. *Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine su uno spazio vettoriale V, e siano*

$$S_1 \subseteq \mathbb{A}, \quad S_2 \subseteq \mathbb{A}$$

due sottospazi affini di giaciture W_1 e W_2 rispettivamente.

- *S_1 e S_2 si dicono* **paralleli**, *in simboli*
$$S_1 \parallel S_2,$$
se $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$;
- *se S_1 e S_2 non sono paralleli, allora si dicono* **incidenti** *se*
$$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset,$$
mentre si dicono **sghembi** *se*
$$S_1 \cap S_2 = \emptyset.$$

4. Passaggio da equazioni cartesiane ad equazioni parametriche

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sottospazio affine dato dalle equazioni cartesiane $A \cdot x = b$. Per trovare delle equazioni parametriche per S, si risolve il sistema di equazioni lineari $A \cdot x = b$, esprimendo le sue soluzioni in funzione di opportune variabili libere $t_1, \ldots, t_m$, che equivale a trovare una soluzione particolare Q di $Ax = b$, ed una base $w_1, \ldots, w_m$ dello spazio W delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot x = 0$, in modo che

$$S = Q + W = Q + t_1 w_1 + ... + t_m w_m,$$

al variare di $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{K}$.

5. Passaggio da equazioni parametriche ad equazioni cartesiane

Sia $S \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ un sottospazio affine dato dalle equazioni parametriche

$$\begin{cases} x_1 = q_1 + t_1 w_{11} + t_2 w_{12} + \cdots + t_m w_{1m} \\ x_2 = q_2 + t_1 w_{21} + t_2 w_{22} + \cdots + t_m w_{2m} \\ \vdots \\ x_n = q_n + t_1 w_{n1} + t_2 w_{n2} + \cdots + t_m w_{nm} \end{cases}$$

Osserviamo che un punto $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{K}}$ appartiene ad S se e solo se il seguente sistema lineare delle indeterminate $t_1, t_2, \ldots, t_m$ ammette soluzione

$$\overbrace{\begin{pmatrix} w_{11} & \ldots & w_{1m} \\ w_{21} & \ldots & w_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{n1} & \ldots & w_{nm} \end{pmatrix}}^{A} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_m \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} x_1 - q_1 \\ x_2 - q_2 \\ \vdots \\ x_n - q_n \end{pmatrix}}^{b}.$$

Ciò è equivalente all'annullamento delle ultime $n - r$ componenti del vettore $\widetilde{b}$, dove $(\widetilde{A}|\widetilde{b})$ è una matrice che si ottiene da $(A|b)$ mediante operazioni elementari e $\widetilde{A}$ è a scala. Osserviamo che $\dim S = m = \mathrm{rg}\ A$. Quindi, se $\widetilde{b} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_1 \\ \widetilde{b}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{b}_n \end{pmatrix}$, delle equazioni cartesiane per S sono date da

$$\begin{cases} \widetilde{b}_{m+1} = 0 \\ \widetilde{b}_{m+2} = 0 \\ \cdots \\ \widetilde{b}_n = 0. \end{cases}$$