

BUCHI NERI

- I BUCHI NERI SONO OGGETTI DI RAGGIO ZERO E DENSITA' INFINITA

- DOMANDA: QUALE SAREBBE IL RAGGIO DI UN OGGETTO LA CUI VELOCITA' DI FUGA E' PARI A QUELLA DELLA LUCE?

- DERIVAZIONE DEL RAGGIO DI UN BUCO NERO LA PLACE \Rightarrow

$$v_e = (2GM/R)^{1/2} \quad \text{VELOCITA' DI FUGA}$$

PER UNA STELLA DI NEUTRONI $M = 1.4 M_{\odot}$, $R = 1.5 \times 10^6 \text{ cm}$

$$\Rightarrow v_e = 1.6 \times 10^{10} \text{ cm/sec}$$

PIU' DELLA META' DELLA VELOCITA' DELLA LUCE

• SE $v_e = c \Rightarrow$

$$R_{sch} = 2GM/c^2$$

RAGGIO DI SCHWARZSCHILD

FORMAZIONE DI UN BUCO NERO

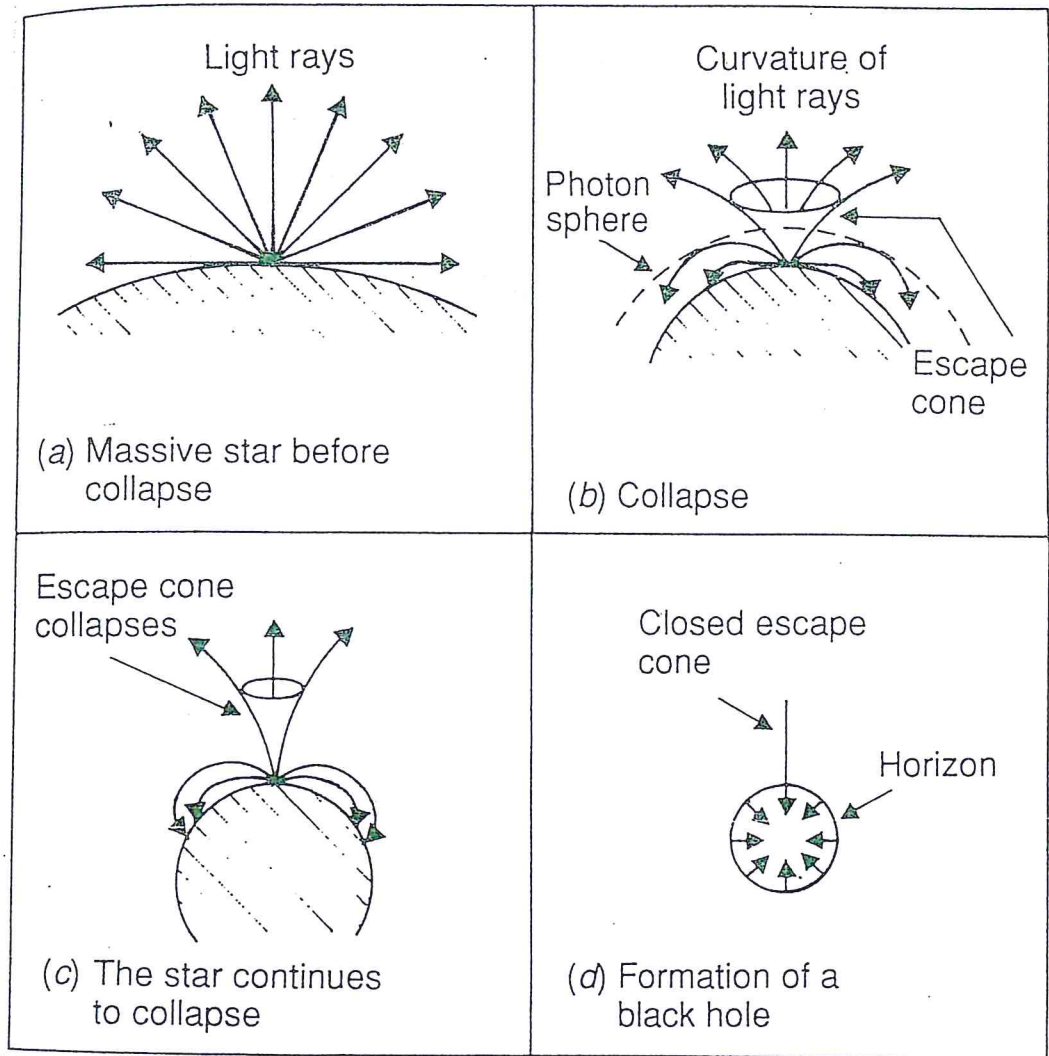


Figure 26: The imprisonment of light in four stages. (a) Massive star before collapse; (b) collapse; (c) the star continues to collapse; (d) formation of a black hole. (After W. Kaufmann.)

- QUALUNQUE OGGETTO, A PRESCINDERE DA EFFETTI QUANTOMECCANICI, IL CUI RAGGIO R DIVENTI PIÙ PICCOLO DEL SUO RAGGIO R_{sch} È CONDANNATO A COLLASSARE AD UN PUNTO SINGOLO

- IL VALORE NUMERICO DEL RAGGIO R_{sch} PER UN BUCO NERO DI $1M_{\odot}$ È:

$$R_{sch} = 3 \times 10^5 \text{ cm.}$$

- IL RAGGIO DI SCHWARZSCHILD CRESCE AL CRESCERE DELLA MASSA

- I BUCHI NERI STELLARI SONO SOLO ALCUNE VOLTE PIÙ PICCOLI DI UNA STELLA DI NEUTRONI DI PARI MASSA

- IL RAGGIO R_{sch} DI UN BUCO NERO DI $\sim 10^6 M_{\odot}$ (BUCO NERO AL CENTRO DI UNA GALASSIA) È $\sim 3 \times 10^9 \text{ km.}$

②
● L'ESPRESSIONE $2GM/c^2$ FU DERIVATA PER LA PRIMA VOLTA DA LAPLACE, TUTTAVIA LA SUA DERIVAZIONE CONTIENE DUE ERRORI:

- L'ENERGIA CINETICA DELLA LUCE NON È $mv^2/2$

- LA LEGGE DI NEWTON NON VALE QUANDO LA LUCE TROVA DIFFICOLTÀ PER USCIRE DALLA MORSA GRAVITAZIONALE DI UN CORPO MASSICCIO

● DERIVAZIONE DI SCHWARZSCHILD

K. SCHWARZSCHILD FU IL PRIMO A DARE LA CORRETTA DERIVAZIONE DELLE DIMENSIONI DI UN OGGETTO, CHIAMATO IN SEGUITO **BUCO NERO**, CHE NON LASCI USCIRE LUCE DALLA SUA MASSA GRAVITAZIONALE

● TUTTAVIA L'ESPRESSIONE DI LAPLACE È QUELLA DI SCHWARZSCHILD SONO IDENTICHE

I DUE ERRORI DI LAPLACE SI ERANO ANNULLATI L'UN L'ALTRO!

• L'ANALISI DI SCHWARZSCHILD

UN FOTONE DI LUNGHEZZA D'ONDA λ_0 ALLA POSIZIONE R AL DI FUORI DI UNA MASSA SFERICA AUTOGRAVITANTE DI MASSA M AVRA' UNA LUNGHEZZA D'ONDA $\lambda \gg \lambda_0$ QUANDO ENERGE ALL' INFINITO

• QUESTO EFFETTO SI CHIAMA REDSHIFT GRAVITAZIONALE

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right)^{-1/2}$$

SE $R = 2GM/c^2$ LA LUNGHEZZA D'ONDA

$\lambda = \infty$ E L'ENERGIA DEL FOTONE $hc/\lambda = 0!$

SE $R \gg R_{sch} \Rightarrow \frac{\lambda_0}{\lambda} = 1 - \frac{GM}{c^2 R} ; \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{GMm}{R}$

$\begin{cases} E = hc/\lambda_0 \\ m = E/c^2 \end{cases}$

• \Rightarrow SE UN CORPO HA DIMENSIONI INFERIORI AL SUO RAGGIO DI SCHWARZSCHILD TUTTI I FOTONI CHE TENTANO DI FUGGIRE VENGONO ARROSSATI AL PUNTO DA NON ESISTERE PIU' PRIMA DI USCIRE DALLA SUPERFICIE DEL CORPO

QUESTA E' LA DEFINIZIONE DI $R_{sch}!$

- QUESTA DERIVAZIONE DEL $R_{\mu\nu}$ RICHIEDE L'USO DELLA VERSIONE EINSTEINIANA DELLA TEORIA DELLA GRAVITAZIONE DI NEWTON

- LA RELATIVITÀ GENERALE INCLUDE INFATTI LA TEORIA DI NEWTON CHE CORRISPONDE AL CASO DI CAMPO GRAVITAZIONALE DEBOLE

- LO SPAZIO-TEMPO È FORTEMENTE ALTERATO ATTORN AL BUCO NERO

→ NON SI PUÒ PENSARE A $2GM/c^2$

COME AD UN RAGGIO REALE POICHÉ SAREBBI IMPOSSIBILE MISURARLO

- CIÒ CHE SIAMO IN GRADO DI MISURARE È L'ORIZZONTE DEGLI EVENTI

- L'ORIZZONTE DEGLI EVENTI È LA SUPERFICIE DA CUI I FOTONI USCENTI RIESCONO A MALA PENA AD USCIRE E RAGGIUNGERE L'INFINITO

DISTORSIONE SPAZIO TEMPORALE VICINO ALL'ORIZZONTE DEGLI EVENTI DI UN BUCO NERO

Black Holes

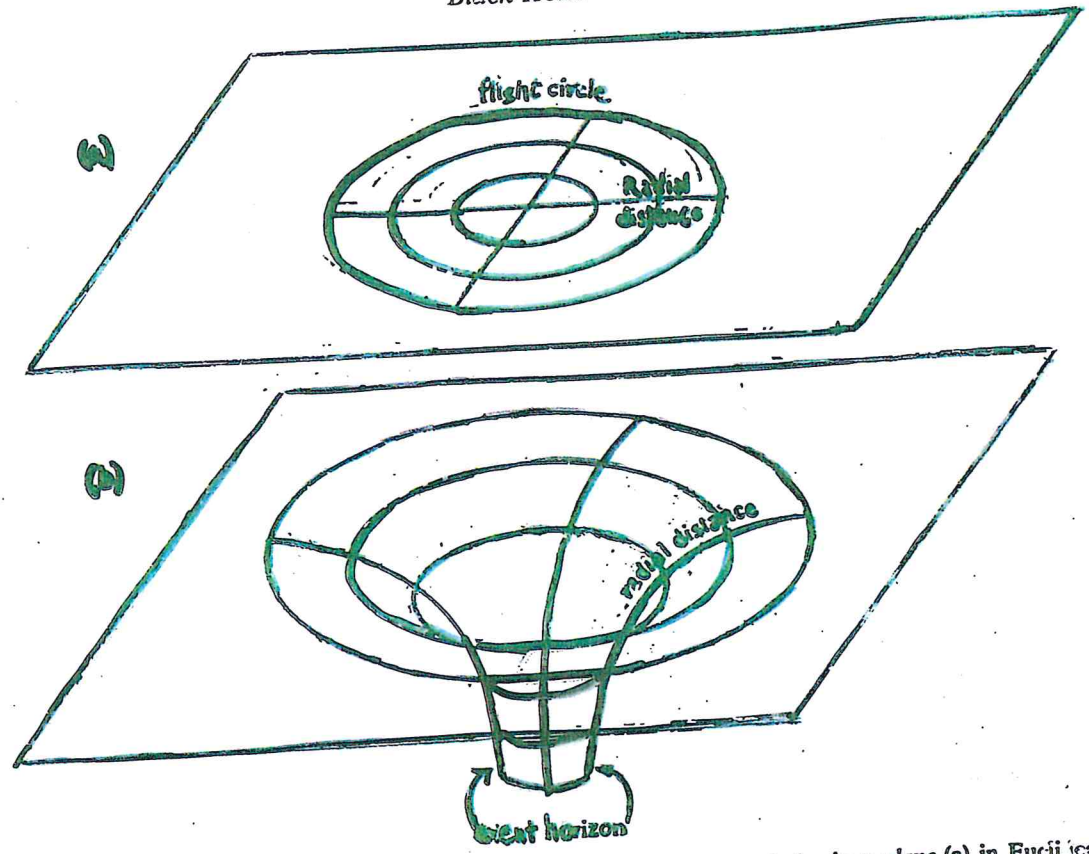


Figure 7.9. Flight circles in a plane (a) in Euclidean geometry (b) in the non-Euclidean geometry near the event horizon of a black hole. In case (b), one has to travel a greater distance inward than in case (a) to have a flight circle of given smaller circumference. The radial direction in both cases is as indicated. At great distances from the event horizon (not drawn), the "curvature" of our embedding diagram becomes negligibly small, and the flight circles of case (b) have nearly the same geometry as case (a).

NEL CASO DELLO SPAZIO CURVO SI DEVE ANDARE PIÙ VICINI AL BUCO DI NERO DI QUANTO SAREBBE NECESSARIO NEL CASO EUCLIDEO PER MISURARE UNA CIRCONFERENZA DATA

PROPRIETA' DEI BUCHI NERI

At a distance $R = 1.5 R_{sch}$

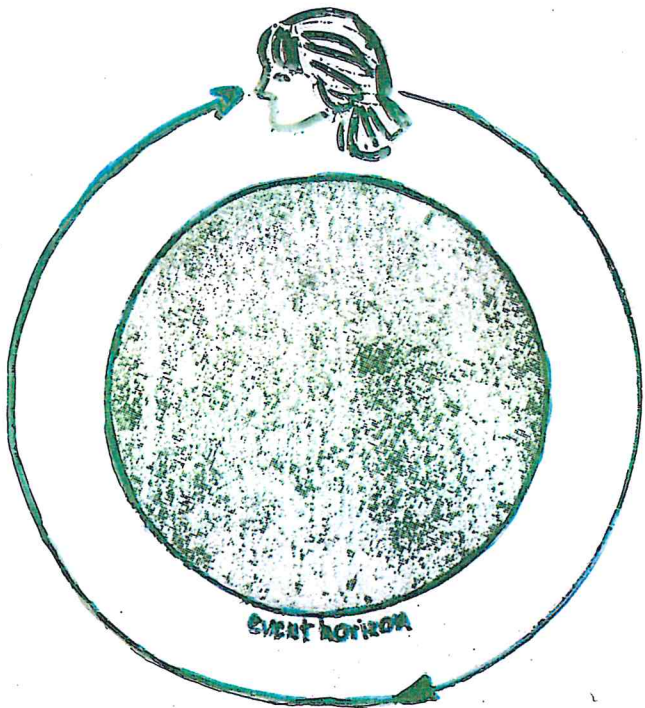


Figure 7.10. When at a circumference equal to 1.5 times the circumference of the event horizon of a black hole a suitably suspended astronaut can see the back of his own head without the benefit of any mirrors.

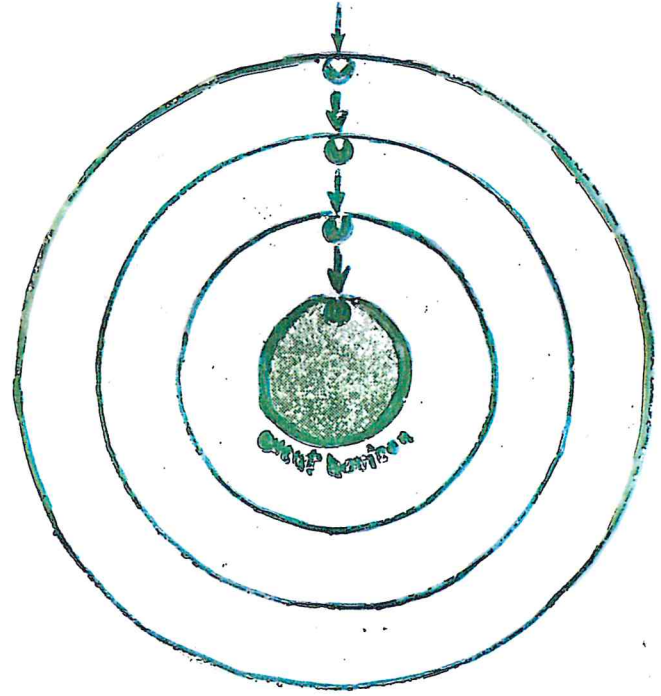


Figure 7.11. Journey to the center of a black hole. As an adventurous explorer falls toward a black hole, he sends out light signals in all directions. The explorer sees locally the photons flee away from him in all directions at the speed of light c (small circles). However, only the photons traveling in the outward direction of the light cone will escape from the gravitational clutch of the black hole to reach eventually any outside observer.

L'OSSERVATORE CHE SI AVVICINA AL BUCO NERO VEDE I SEGNALI LUMINOSI CHE SI ALLONTANANO DA LUI IN TUTTE LE DIREZIONI ALLA VELOCITA' DELLA LUCE MA SOLO I FOTONI CHE VANNO VERSO L'ESTERNO RIESCONO A SFUGGIRE ALLA MORSIA GRAVITAZIONALE E RAGGIUNGERE UN ALTRO OSSERVATORE ESTERNO.

LA CIRCONFERENZA DELL'ORIZZONTE DEGLI EVENTI

$$2\pi R_{sd} = 4\pi \frac{GM}{c^2}$$

$$AREA = 4\pi R_{sd}^2 = 16\pi G^2 M^2 / c^4$$

DOVE M È LA MASSA DEL BUCO NERO CHE PUÒ ESSERE MISURATA APPLICANDO LA LEGGE DI KEPLERO AD UN CORPO CHE ORBITA ATTORNO AL BUCO NERO A GRANDE DISTANZA

$$M = \frac{4\pi^2}{G} \frac{a^3}{P^2}$$

P = PERIODO ORBITALE

a = DISTANZA DAL BUCO NERO AL CORPO ORBITANTE

LA VALIDITÀ DELLA GEOMETRIA EUCLIDEA IN QUESTO CASO È PRESERVATA GRAZIE ALLA SIMMETRIA ANGOLARE DEL PROBLEMA

LA DIMENSIONE RADIALE INVECE SUBISCE UNA DISTORSIONE RISPETTO ALLA NORMALE GEOMETRIA EUCLIDEA

- A GRANDI DISTANZE DALLA SUPERFICIE DEGLI EVENTI LA DISTORSIONE DELLO SPAZIO-TEMPO È TRASCURABILE MA DIVENTA SEMPRE PIÙ SEVERA VICINO ALL'ORIZZONTE DEGLI EVENTI

- SPAZIO E TEMPO CAMBIANO REGOLE ATTRAVERSO L'ORIZZONTE DEGLI EVENTI

IN VIAGGIO VERSO IL BUCO NERO

- COSA SUCCEDEREBBE SE CI AVVICINASSIMO AD UNA POSIZIONE DOVE LA CIRCONFERENZA È ~ 1.5 VOLTE LA CIRCONFERENZA DELL'ORIZZONTE DEGLI EVENTI ?

- SE GUARDASSIMO VERSO IL BUCO NERO NON VEDREMMO NULLA, MA SE GUARDASSIMO \perp AL BUCO NERO VEDREMMO IL RETRO DELLA NOSTRA TESTA !!

- I FOTONI CHE LASCIANO IL RETRO DELLA NOSTRA TESTA ORBITEREBBERO CIRCOLARMENTE ATTORNO AL BUCO NERO FINO AD ARRIVARE DAVANTI AI NOSTRI OCCHI !

UNO SPECCHIO GRAVITAZIONALE

• ABBASSANDOCI SEMPRE DI PIÙ ARRIVEREMMO AL PUNTO DI **NON-RITORNO**, DOVE NESSUNA FORZA IN NATURA PUÒ OPPORSI ALLA FATALE ATTRAZIONE DEL BUCO NERO ($g = \frac{GM}{r^2}$)
→ ∞ se $r \rightarrow R_{sch}$) $(1 - \frac{2GM}{c^2 r})^{1/2}$

• PER UN OSSERVATORE CHE CI GUARDASSE DI LONTANO IMPIEGHEREMMO UN TEMPO **INFINITO** PER RAGGIUNGERE L'ORIZZONTE DEGLI EVENTI

[IL TEMPO SCORRE DIVERSAMENTE PER DUE OSSERVATORI IMMERSI IN DIVERSI CAMPI GRAVITAZIONALI]

• DURANTE LA CADUTA, QUALSIASI FORMA DI COMUNICAZIONE SAREBBE IMPOSSIBILE
⇒ I FOTONI VERREBBERO ARROSSATI O CADREBBERO CON NOI NEL BUCO NERO

• LO SPAZIO ED IL TEMPO SI SCAMBIANO I RUOLI QUANDO CI SI AVVICINA ALL'ORIZZONTE DEGLI EVENTI

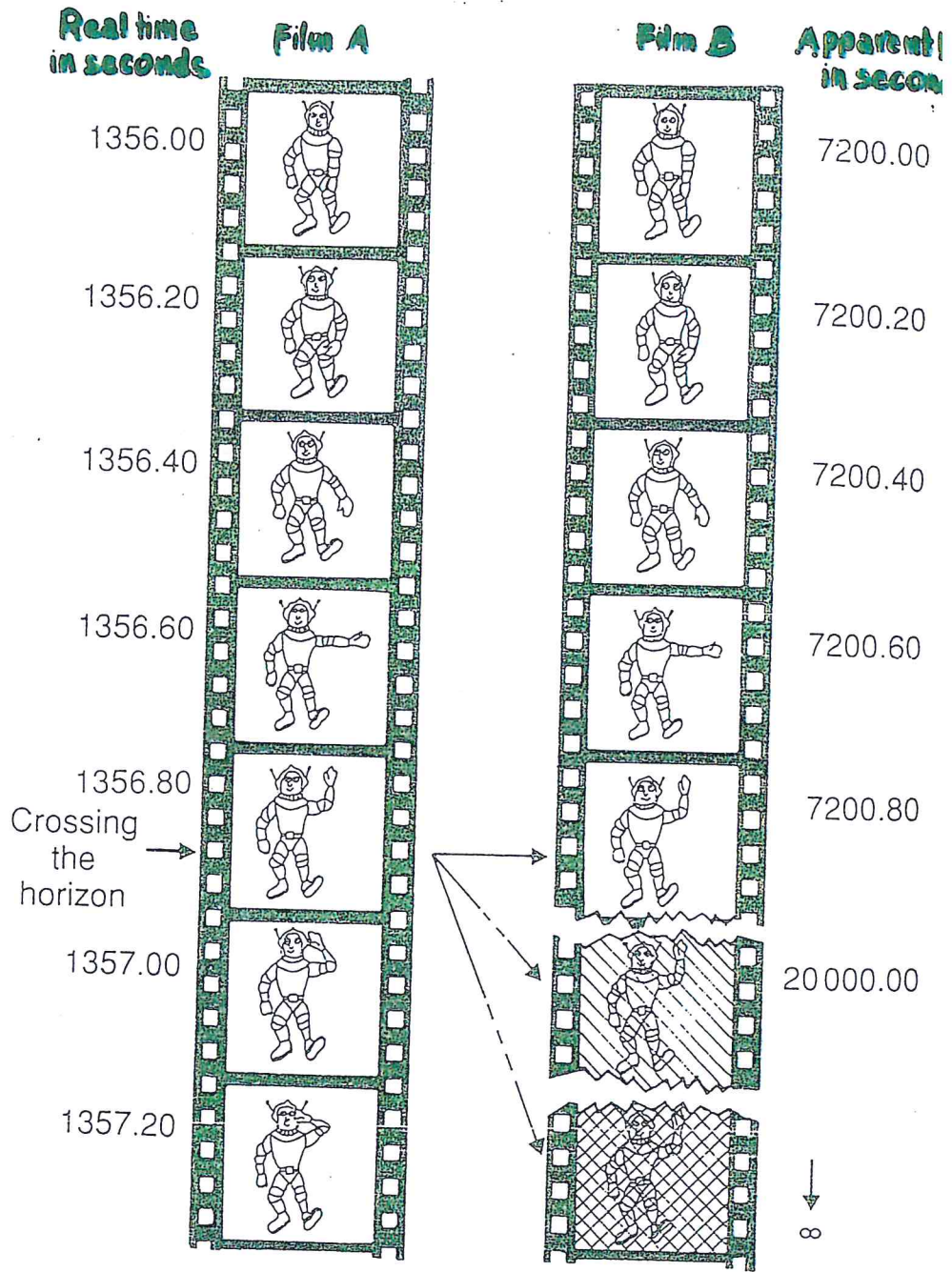


Figure 28. The astronaut's salute.

The film on the left shows the scene on board the spaceship in proper time, that is, as measured by the ship's clock as the ship falls into a black hole. The astronaut's salute is decomposed into instants at proper time intervals of 0.2 second. Crossing the horizon is not accompanied by any particular event. The film on the right shows the scene received by the distant observers via televised images. It is also decomposed into intervals of apparent time, also of 0.2 second. At the beginning of his

- LONTANO DAL BUCO NERO SI PUÒ EVITARE LA GRAVITÀ MA NON IL TRASCORRERE DEL TEMPO
- VICINO AL BUCO NERO LA GRAVITÀ È INARRESTABILE MA IL TEMPO SI È FERMATO
- MENTRE CADIAMO LA GRAVITÀ MOLTO PIÙ FORTE SOTTO DI NOI CHE SOPRA CI FAREBBE ALLUNGARE, ALLUNGARE,
- L'UNICA COSA CHE CI POTRÀ CONSOLARE È CHE PROBABILMENTE SIAMO ENTRATI IN UN ALTRO UNIVERSO

Tabelle 2

Table 2: The gravitational parameter of ordinary bodies

Object	Mass	Size R	Schwarzschild radius R_g	Gravitational parameter R_g/R
Atom	10^{-26} kg	10^{-8} cm	10^{-31} cm	10^{-43}
Human being	100 kg	1 m	10^{-23} cm	10^{-25}
Mountain	10^{12} kg	1 km	10^{-13} cm	10^{-18}
Earth	10^{25} kg	10^4 km	1 cm	10^{-9}
Sun	10^{30} kg = $1 M_{\odot}$	10^6 km	1 km	10^{-6}
White dwarf	$1 M_{\odot}$	10^4 km	1 km	10^{-4}
Neutron star	$1 M_{\odot}$	10 km	1 km	10^{-1}
Galaxy	$10^{11} M_{\odot}$	10^5 l.y.	10^{-2} l.y.	10^{-7}
Universe (if closed)	$10^{23} M_{\odot}$	10^{10} Ly	10^{10} l.y.	1?

Note: The gravitational parameter is the ratio between the Schwarzschild radius – which depends only on the mass – and its real size. In other words, it measures the 'compactness' of a body; the closer its parameter is to one, the closer a body is to the black hole state. The numerical values in the table are given to the nearest power of ten. The parameters for the Universe require careful consideration: see Chapter 19.

$$R_g = \frac{2GM}{c^2}$$

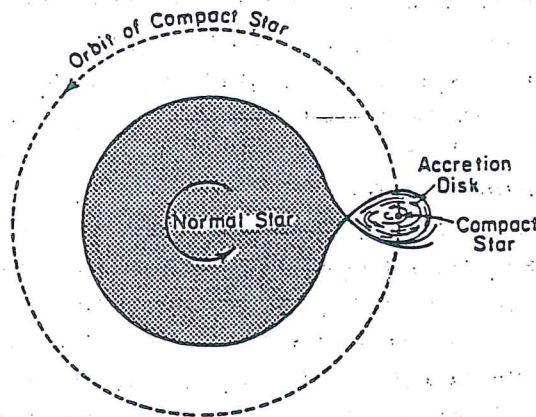


Fig 29 Material captured from a normal companion forms an accretion disk and spirals toward the black hole giving rise to x-rays.