Siano X e Y spazi topologici, $\sim_X$, $\sim_Y$ relazioni d'equivalenza risp. su X e su Y.

Sia $f: X \to Y$ continua t.c. per $x_1, x_2 \in X$,

$$x_1 \sim_X x_2 \Rightarrow f(x_1) \sim_Y f(x_2).$$

Allora $\exists!\ \tilde{f} : X/\sim_X \to Y/\sim_Y$ continua t.c.

$$\tilde{f}([x]) = [f(x)].$$

$\boxed{\text{E}}$

$\tilde{f}$ ottenuta "passando" f al quoziente.

Esempio $[0,1]/(0 \sim 1)$ (identifico 0 e 1 mentre gli altri punti di $[0,1]$ sono identificati solo con sé stesso)

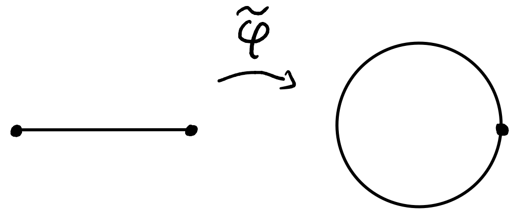
$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\ {[0,1]/(0\sim 1)} \arrow[ur, "\tilde{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

$\varphi(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

$\varphi(0) = \varphi(1)$

$\tilde{\varphi}$ continua e biettiva

Faremo vedere più avanti che $\tilde{\varphi}$ è un omeomorfismo, quindi $[0,1]/(0 \sim 1) \cong S^1$



Def Se $A \subset X$ poniamo

$$X/A \overset{def}{=} X/(a \sim a' \ \forall a, a' \in A)$$ spazio quoziente di X su A (A diventa un punto nel quoziente.

Es $[0,1]/\{0,1\} \cong S^1$.

Def Sia $A \subset X$ un sottospazio e $f : A \to Y$ un'applicazione. La relazione d'equivalenza $\sim_f$ indotta da f su X è definita per ogni $x_1, x_2 \in X$, come

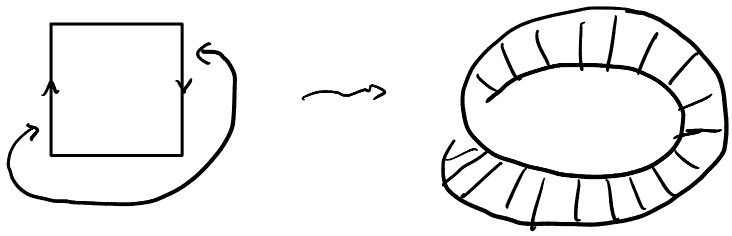
$$x_1 \sim_f x_2 \iff x_1 = x_2 \text{ oppure } x_1, x_2 \in A \text{ e } f(x_1) = f(x_2).$$

Rimane quindi definito lo spazio quoziente $X/\sim_f$.
f è detta anche <u>applicazione d'incollamento</u>.

<u>Esempi</u> (incollamenti).

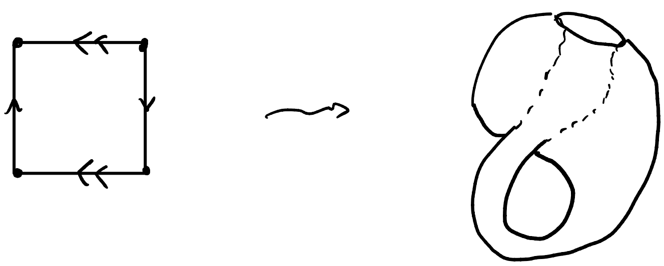
1) $X/A = X/\sim_c$, $c : A \to A$ costante.

2)  <u>cilindro $S^1 \times [0,1]$</u>

3)  <u>Striscia di Möbius Mb</u>

La costruzione si generalizza a più applicazioni d'incollamento

4)  <u>Toro T^2</u>

5)  <u>Bottiglia di Klein Kl</u>

Spazi proiettivi

Sia K un campo ($K = \mathbb{R}$ oppure $K = \mathbb{C}$).

Per $x, y \in K^{n+1} - \{0\}$ definiamo:

$x \sim y \iff \exists \lambda \in K - \{0\}$ t.c. $x = \lambda y$.

Questa è una relazione d'equivalenza (proporzionalità).

Def Lo <u>spazio proiettivo</u> di dimensione n sul campo K è l'insieme quoziente

$$KP^n \overset{def}{=} (K^{n+1} - \{0\})/\sim \quad (\sim \text{ rel. di proporzionalità}).$$

$\pi : K^{n+1} - \{0\} \to KP^n$, $\pi(x_0, \dots, x_n) = [x_0, \dots, x_n]$

<u>coordinate omogenee</u>

Siamo interessati a $\mathbb{R}P^n = P^n$ e $\mathbb{C}P^n$

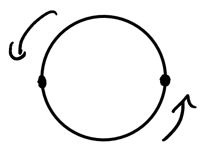
Dato che $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ sono spazi topologici (con la topologia Euclidea), $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{C}P^n$ sono <u>spazi topologici</u> con la <u>topologia quoziente</u>.

$n = 0$ $\quad \mathbb{R}P^0 \cong \mathbb{C}P^0 \cong \{0\}$ un solo punto

$n = 1$ $\quad \mathbb{R}P^1 = (\mathbb{R}^2 - \{0\})/\sim$

$[x] \in \mathbb{R}P^1 \Rightarrow [x] = \left[\frac{x}{\|x\|}\right] = \{x, -x\} \Rightarrow$

$\mathbb{R}P^1 = S^1/(x \sim \pm x \ \forall x \in S^1)$



$\Rightarrow \mathbb{R}P^1 \cong [-1,1]/(1\sim -1) \cong S^1$

In generale $[x] = \left[\frac{x}{\|x\|}\right] \in \mathbb{K}P^n$ $(\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C})$

$\Rightarrow \mathbb{R}P^n = S^n/(x \sim \pm x \quad \forall x \in S^n)$

$\mathbb{C}P^n = S^{2n+1}/(x \sim \lambda x \quad \forall \lambda \in S^1, \forall x \in S^{2n+1})$

$S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{2n+2}$ sfera unitaria

Se $x \in S^n$, diciamo che x e $-x$ sono punti antipodali della sfera e

$$\iota : S^n \longrightarrow S^n, \quad \iota(x) = -x$$

è detta applicazione antipodale

Quindi $\mathbb{R}P^n = S^n/\sim_\iota$.

<u>OSS</u> In generale se $\sim$ è rel. d'equiv. su X e $A \subset X$ t.c. $\pi|_A : A \to X/\sim$ suriettiva $\not\Rightarrow X/\sim \;\cong A/\sim$.

Possiamo definire $h : A/\sim \longrightarrow X/\sim$

$h([a]_A) = [a]_X$ continua e biiettiva ma <u>non necessariamente aperta</u>.

$\boxed{E}$ Qual è il problema? e perché nel caso dei proiettivi il quoziente della sfera è $\mathbb{R}P^n$ (o $\mathbb{C}P^n$)?

Oss $f : \mathbb{R}P^n \to X$ continua $\iff$

$$\exists \quad \begin{tikzcd} \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "//"] & X \\ \mathbb{R}P^n \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \quad \text{continua}$$

Es 1) $\varphi : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}$

$$\varphi([x_0, \dots, x_n]) = \frac{x_0 x_1}{x_0^2 + \dots + x_1^2}$$

2) $\psi : \mathbb{C}P^n \to \mathbb{C}$

$$\psi([z_0, \dots, z_n]) = \frac{z_0 \bar{z}_1}{|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2}$$

Sono continue.

Oss L'immersione canonica $K^{n+1} \hookrightarrow K^{m+1}$, $n < m$, induce un'immersione $KP^n \hookrightarrow KP^m$.
KP^n si può considerare come un sottospazio proiettivo di KP^m.

Def Un'applicazione $f : KP^n \to KP^n$ è detta <u>proiettività</u> se $\exists$ $F : K^{n+1} \to K^{n+1}$ K-lineare t.c.

$$f([x]) = [F(x)] \quad \forall [x] \in KP^n.$$

Oss La definizione ha senso $\iff \operatorname{Ker} F = 0$ cioè $\iff F \in \operatorname{Aut}(K^{n+1})$.

Quindi le proiettività di KP^n formano un gruppo chiamato gruppo lineare proiettivo

$$PGL(n+1, K) = GL(n+1, K) / (K - \{0\})$$

dove il gruppo moltiplicativo $K - \{0\}$ è considerato come sottogruppo normale

$$K - \{0\} \cong (K - \{0\}) I_{n+1} \subset GL(n+1, K)$$

dei multipli scalari della matrice identica.

Una proiettività è determinata da una matrice invertibile $A \in GL(n+1, K)$, a meno di un multiplo scalare non nullo.

Es $f : RP^2 \longrightarrow RP^2$, $f\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}\right]$

Teorema Sia $f : KP^n \longrightarrow KP^n$ una proiettività, con $K = R$ o $K = C$. Allora f è un omeomorfismo.

Dim $\exists\ F : K^{n+1} \to K^{n+1}$ automorfismo lineare t.c.

$$f([x]) = [F(x)] \quad \forall\ [x] \in KP^n$$

$\Rightarrow$ F continua e f si ottiene passando

$F|_{K^{n+1}-\{0\}}$ al quoziente

$$\begin{array}{ccc} K^{n+1}-\{0\} & \xrightarrow{F|} & K^{n+1}-\{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ KP^n & \xrightarrow[f]{} & KP^n \end{array}$$

$\Rightarrow$ f continua.

f^{-1} è una proiettività $\Rightarrow$ f^{-1} continua

Quindi f omeo.

OSS Un sottospazio proiettivo $S : Ax = 0$ di KP^n è chiuso in KP^n $(K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$, dove $A \in M_{m,\,n+1}(K)$, $x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Poniamo $H_i : x_i = 0$ iperpiano proiettivo.

$\boxed{E}$

Teorema Le carte affini canoniche

$$\varphi_i : KP^n - H_i \to K^n \quad (K = \mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$$\varphi_i([x_0, \ldots, x_n]) = \frac{1}{x_i}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

Sono omeomorfismi $\forall\ i = 0, \ldots, n$.

OSS $KP^n - H_i$ è aperto in KP^n.