4 Novembre

<u>Teorema</u> (2° regola Hopital, caso $\frac{0}{0}$)

Sia $I$ un intervallo ed $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ di accumulazione per $I$. Siano $f$ e $g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, derivabili in $I \setminus \{x_0\}$, con $g(x) \neq 0 \ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$ e $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in I \setminus \{x_0\}$.

Si abbia inoltre $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x_0) = 0$.

Allora, se esiste il limite $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

si ha anche $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Es

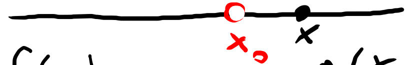
$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x} =$$

$(x - \sin x)' = 1 - \cos x$ , $(x^3)' = 3x^2$

$$= \frac{1}{6} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{6}$$

$(1 - \cos x)' = \sin x$ , $(3x^2)' = 6x$

Dim. Consideriamo $x_0 \in \mathbb{R}$.



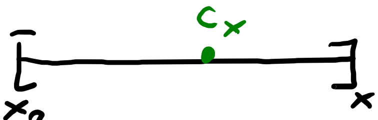

$f, g : I \setminus \{x_0\}$. Possiamo definire $f(x_0) = 0$, $g(x_0) = 0$.

Siccome $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, risulta che $f$ e $g$ sono continue in $x_0$

Mi limiterò a dimostrare che $\lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$$

. Applico il teorema di Cauchy a $f$ e $g$ nell'intervallo $[x_0, x]$




. Siccome $f$ e $g$ sono in $C^0([x_0, x])$, sono derivabili in $(x_0, x)$ e $g'$ è ovunque non nulla, $\exists\ c_x \in (x_0, x)$ t.c.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

. Notare che

$x_0 < c_x < x \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0^+} c_x = x_0$

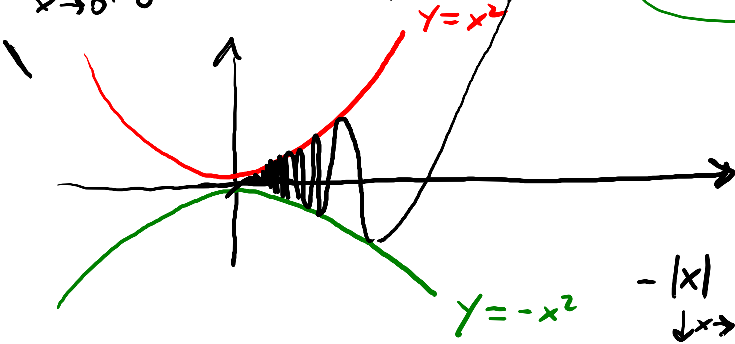
$$\lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \qquad x_0 < c_x < x$$

$$= \lim_{c\to x_0^+} \frac{f'(c)}{g'(c)} = L$$

Esempio $\quad f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$, $\quad g(x) = x \qquad x > 0.$

$\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$,

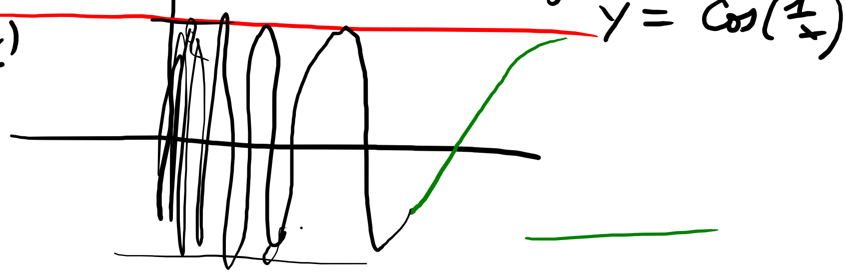
$-x^2 \le x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le x^2 \overset{\text{conf}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$




$$\underset{\substack{\downarrow x\to 0^+ \\ 0}}{-|x|} \le x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \le \underset{\substack{\downarrow x\to 0^+ \\ 0}}{|x|}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$



Teor (3° regola Hopital $\frac{\infty}{\infty}$) $f, g : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ $x_0$ un punto di accumulazione di $I$ in $\overline{\mathbb{R}}$. $f$ e $g$ derivabili in $I \setminus \{x_0\}$ con $g'(x) \neq 0 \ \forall x \neq x_0$

Sia inoltre $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$

Allora, se esiste $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Esempi $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n\, x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n(n-1)\, x^{n-2}}{e^x} =$

$$= \cdots = \lim_{x \to +\infty} \frac{\overbrace{n(n-1) \cdots 2}^{n!}\; x}{e^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$. Per qualsiasi valore di $n \in \mathbb{N}$, si ha $x^n \ll e^x$ se $x \gg 1$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\varepsilon}}{\lg x} \qquad \varepsilon>0$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\varepsilon\, x^{\varepsilon \cancel{-1}}}{\cancel{x^{-1}}} = \lim_{x\to+\infty} \varepsilon\, x^{\varepsilon} = +\infty$$

$x^{\varepsilon} >> \lg x$ se $x >> 1$.

Esempio $$\lim_{x\to 0^+} x \lg x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\lg x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-1\; x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x)$$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}\,\cancel{2}x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{x}$$

## Derivate di ordine superiore.

Data $f: I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$, $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$

Se $\exists\, f'(x_0)$ scriveremo anche $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$

**Def** Sia $f : I \to \mathbb{R}$. Supponiamo di aver definito $f^{(i)}(x)$ $\forall x \in I$. Supponiamo che in un punto $x_0 \in I$ esista $\left(f^{(i)}\right)'(x_0)$. Questo numero lo chiameremo derivata di ordine $i+1$ di $f$ in $x_0$ e scriveremo

$$f^{(i+1)}(x_0) = \left( f^{(i)}\right)'(x_0).$$

Se $f^{(i)} \in C^0(I)$ scriveremo $f \in C^i(I)$. Scriviamo $f \in \underline{C^\infty(I)}$ se $f \in \underline{C^i(I)}$ $\forall\, i \in \mathbb{N}$.

Esempio Ricordiamo $\prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

$a \in \mathbb{R}$

$x^a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ risulta $x^a \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$

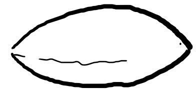
$$\boxed{(x^a)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\, x^{a-n}} \qquad (P_n)$$

Dim per induzione su $n$. Per $n=1$ $(x^a)' = a\, x^{a-1} = \prod_{j=1}^{1} (a-j+1)\, x^{a-1}$

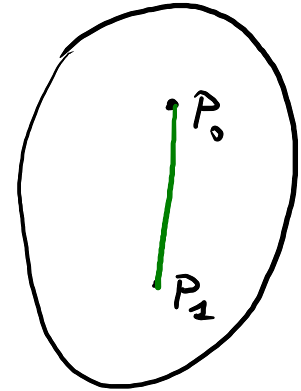
$$(x^a)^{(n+1)} = \left( (x^a)^{(n)} \right)' = \left( \prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\, x^{a-n} \right)' = \prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\, (x^{a-n})' =$$

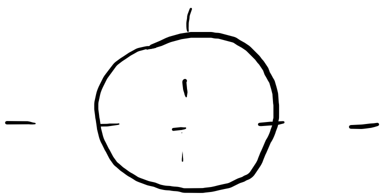
$$= \prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\, (a-n)\, x^{a-(n+1)} = \prod_{j=1}^{n+1} (a-j+1)\, x^{a-(n+1)}$$

# Funzioni convesse

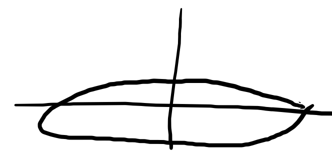


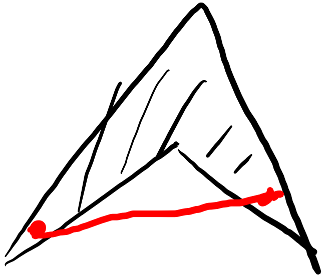
Un sottoinsieme $\Omega$ del piano euclideo si dice convesso quando, per ogni coppia $P_0, P_1 \in \Omega$, il segmento nel piano di estremi $P_0$ e $P_1$ è contenuto in $\Omega$.



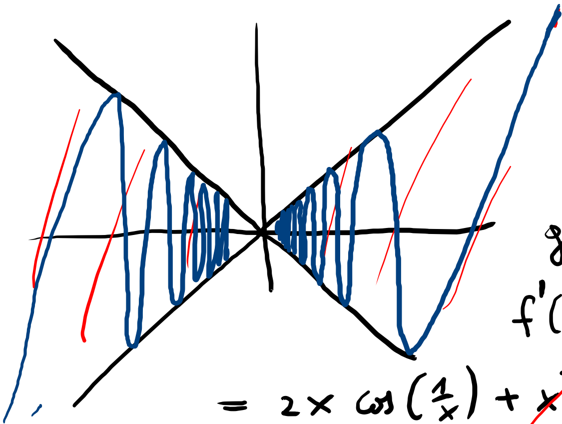

Un disco  è convesso

ellisse è convessa





non è convesso



$$y = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$g'(x) = 1$$

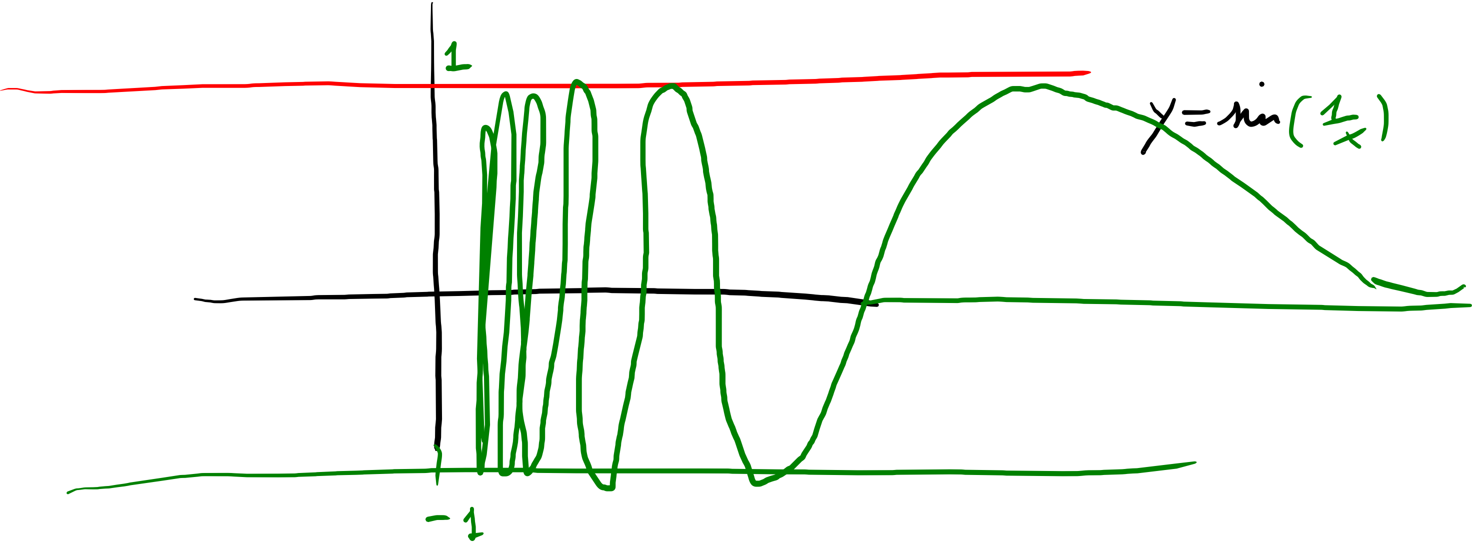
$$f'(x) = \left(x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$$

$$= 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2}\left(\cancel{-}\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\frac{(\cancel{-1})}{\cancel{x^2}}$$

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\overbrace{2x\cos\left(\frac{1}{x}\right)}^{\to 0} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

non esiste



1
-1
y = sin(1/x)