

Capitolo 3

Basi

3.1 Sistemi di generatori e basi

Sia V un K -spazio vettoriale fissato.

Definizione 3.1.1 (Sistema di generatori). Una famiglia $S = \{v_i\}_{i \in I}$ di elementi di V è un **sistema di generatori** di V se $V = L(S)$, cioè V coincide con il sottospazio generato da S , il che significa che ogni elemento di V può essere espresso come combinazione lineare di un numero finito di elementi v_i (vedere l'Osservazione 3).

Definizione 3.1.2 (Spazio vettoriale finitamente generato). V è detto **finitamente generato** se ammette un sistema finito di generatori v_1, \dots, v_n .

Definizione 3.1.3 (Base). Una famiglia $\{v_i\}_{i \in I}$ di elementi di V è una **base** di V se è un sistema di generatori linearmente indipendenti.

Teorema 3.1.4. Se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è una base finita di V , ogni vettore $v \in V$ si esprime come combinazione lineare di v_1, \dots, v_n in maniera unica.

Dimostrazione. Segue dalla Proposizione 2.6.6. □

I coefficienti x_1, \dots, x_n dell'unica combinazione lineare $v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$ sono detti **coordinate di v rispetto alla base \mathcal{B}** .

Esempio 3.1.5.

1. Nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano i tre versori comunemente indicati $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ formano una base.

2. In K^n consideriamo gli n vettori e_1, \dots, e_n introdotti nell'Esempio 2.5.5. Abbiamo verificato che ogni vettore di K^n è una loro combinazione lineare: $(x_1, \dots, x_n) = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$. D'altra parte sono linearmente indipendenti perchè se $x_1e_1 + \dots + x_ne_n = 0 = (0, \dots, 0)$, si deve chiaramente avere $x_1 = 0, \dots, x_n = 0$. Dunque (e_1, \dots, e_n) formano una base \mathcal{C} , detta **base canonica o base standard** di K^n . Si parla di base canonica soltanto in K^n , non in altri spazi vettoriali. Le coordinate del vettore (x_1, \dots, x_n) rispetto alla base canonica sono proprio x_1, \dots, x_n .

3. In $M(m \times n, K)$, spazio vettoriale delle matrici $m \times n$ a coefficienti in K , consideriamo le mn matrici E_{ij} con $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, così definite: E_{ij} ha tutti gli elementi nulli,

tranne quello di indici ij che è uguale a 1. Si ha che una matrice $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n}$ si può scrivere $A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \dots + a_{mn}E_{mn}$, e tale combinazione lineare è unica. Dunque le matrici E_{ij} formano una base di $M(m \times n, K)$. Le coordinate di A rispetto a questa base sono proprio gli elementi di A .

4. Gli elementi $1, i$ formano una base di \mathbb{C} come \mathbb{R} -spazio vettoriale.

5. Le potenze di t ($1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$) formano una base infinita di $K[t]$.

6. In \mathbb{R}^2 i vettori $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (3, 4)$ formano una base. Infatti verifichiamo intanto che generano \mathbb{R}^2 : consideriamo un qualunque vettore $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, e cerchiamo se esistono x_1, x_2 tali che $a = x_1v_1 + x_2v_2 = x_1(2, 1) + x_2(3, 4) = (2x_1 + 3x_2, x_1 + 4x_2)$. Deve valere:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = a_1 \\ x_1 + 4x_2 = a_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Anche questo sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x_1, x_2 si può risolvere facilmente per sostituzione, e si trova che ha una e una sola soluzione per ogni scelta di a , e precisamente:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5}a_1 - \frac{3}{5}a_2 \\ x_2 = -\frac{1}{5}a_1 + \frac{2}{5}a_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

Quindi $\mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_2 \rangle$. Inoltre v_1, v_2 sono linearmente indipendenti perchè non sono proporzionali.

3.2 Prolungamento a una base

Teorema 3.2.1 (Lemma dello scambio). *Sia V un K -spazio vettoriale. Supponiamo che $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ sia una sua base. Sia w un vettore non nullo di V e $w = \lambda_1v_1 + \dots + \lambda_nv_n$ la sua espressione come combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B} . Se $\lambda_k \neq 0$ per un certo indice k , $1 \leq k \leq n$, allora anche $v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n$ formano una base di V .*

Dimostrazione. Eventualmente riordinando i vettori, possiamo supporre che $k = 1$, ossia $\lambda_1 \neq 0$, quindi esiste λ_1^{-1} . Dobbiamo dimostrare che w, v_2, \dots, v_n :

1. generano V ;
2. sono linearmente indipendenti.

1. Sia $v \in V$ un qualunque vettore di V : poichè \mathcal{B} è una base, si ha una relazione $v = \mu_1v_1 + \dots + \mu_nv_n$, con opportuni coefficienti $\mu_1, \dots, \mu_n \in K$. Vogliamo rimpiazzare v_1 con w . Ma dall'espressione di w come combinazione lineare di v_1, \dots, v_n , possiamo ricavare $v_1 = \lambda_1^{-1}w - \lambda_1^{-1}\lambda_2v_2 - \dots - \lambda_1^{-1}\lambda_nv_n$. Allora, sostituendo, otteniamo

$$\begin{aligned} v &= \mu_1(\lambda_1^{-1}w - \lambda_1^{-1}\lambda_2v_2 - \dots - \lambda_1^{-1}\lambda_nv_n) + \mu_2v_2 + \dots + \mu_nv_n = \\ &= \lambda_1^{-1}\mu_1w + (\mu_2 - \lambda_1^{-1}\mu_1\lambda_2)v_2 + \dots + (\mu_n - \lambda_1^{-1}\mu_1\lambda_n)v_n. \end{aligned}$$

Quindi v è combinazione lineare di w, v_2, \dots, v_n , e concludiamo che questi generano V .

2. Consideriamo una combinazione lineare nulla di w, v_2, \dots, v_n : $\alpha_1w + \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_nv_n = 0$. Sostituiamo l'espressione di w e otteniamo:

$$\alpha_1(\lambda_1v_1 + \dots + \lambda_nv_n) + \alpha_2v_2 + \dots + \alpha_nv_n = 0$$

e quindi

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + (\alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2) v_2 + \cdots + (\alpha_1 \lambda_n + \alpha_n) v_n = 0.$$

Ma questa è una combinazione lineare nulla dei vettori di \mathcal{B} , che sono linearmente indipendenti, perciò i coefficienti sono tutti nulli:

$$\begin{cases} \alpha_1 \lambda_1 & = 0 \\ \alpha_1 \lambda_2 + \alpha_2 & = 0 \\ \cdots & \cdots \\ \alpha_1 \lambda_n + \alpha_n & = 0 \end{cases}$$

Dalla prima segue $\alpha_1 = 0$ perchè $\lambda_1 \neq 0$, e quindi, sostituendo nelle altre, si ha $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. \square

Il Teorema 3.2.1 precedente, che è interessante in sè, sarà ora usato per dimostrare il seguente teorema, molto importante, ed è perciò noto come “lemma”.

Teorema 3.2.2 (del completamento o prolungamento a una base). *Sia V un K -spazio vettoriale. Supponiamo che $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ sia una sua base. Siano w_1, \dots, w_r , $r \geq 0$, vettori di V linearmente indipendenti. Allora:*

1. $r \leq n$;

2. *esistono $n - r$ elementi di \mathcal{B} $v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-r}}$ tali che $w_1, \dots, w_r, v_{i_1}, \dots, v_{i_{n-r}}$ sia una base di V . In altre parole è possibile completare, o prolungare, w_1, \dots, w_r a una base di V , aggiungendo opportuni elementi di una base data.*

Dimostrazione. Per induzione su r . Il caso $r = 0$ è chiaramente vero.

Supponiamo che valgano 1. e 2. per le famiglie di $r - 1$ vettori linearmente indipendenti, e le dimostriamo per r . Siano dunque w_1, \dots, w_r linearmente indipendenti, allora lo sono anche w_1, \dots, w_{r-1} . Per ipotesi induttiva, si ha allora che $r - 1 \leq n$ ed è possibile trovare in \mathcal{B} $n - r + 1$ vettori in modo che, con w_1, \dots, w_{r-1} , formino una base \mathcal{B}' . Eventualmente rinumerando, possiamo supporre che tale base sia $(w_1, \dots, w_{r-1}, v_{r+1}, \dots, v_n)$.

Dimostriamo 1.: si ha $r \leq n + 1$; se fosse $r = n + 1$, allora $n - r + 1 = 0$, e quindi già (w_1, \dots, w_{r-1}) sarebbe una base di V . Perciò si avrebbe che $w_r \in \langle w_1, \dots, w_{r-1} \rangle$, ma questo è assurdo perchè w_1, \dots, w_r sono linearmente indipendenti (per Prop. 2.6.2). Quindi $r \leq n$.

Dimostriamo 2.: osserviamo che $w_r \neq 0$, altrimenti w_1, \dots, w_r sarebbero linearmente dipendenti; w_r è combinazione lineare dei vettori della base \mathcal{B}' : $w_r = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_{r-1} w_{r-1} + \lambda_r v_r + \cdots + \lambda_n v_n$. Osserviamo che $\lambda_r, \dots, \lambda_n$ non possono essere tutti nulli, supponiamo che sia $\lambda_r \neq 0$; allora per il Lemma dello scambio (Teorema 3.2.1), posso sostituire in \mathcal{B}' w_r al posto di v_r , e allora $(w_1, \dots, w_r, v_{r+1}, \dots, v_n)$ risulta una base di V . Analogamente se è diverso da zero un altro coefficiente fra $\lambda_r, \dots, \lambda_n$. \square

Corollario 3.2.3 (Conseguenze del Teorema di prolungamento a una base).

1. *Se V ha una base finita, ogni sua base è finita.*

2. *Due basi finite di V hanno lo stesso numero di elementi.*

Dimostrazione. Per la 1. supponiamo che $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ sia una base di V formata da n vettori, e che $\mathcal{B}' = \{w_i\}_{i \in I}$ sia un'altra base; se l'insieme d'indici I fosse infinito, potrei

prendere in \mathcal{B}' $n + 1$ vettori $w_{i_1}, \dots, w_{i_{n+1}}$: sono linearmente indipendenti perchè fanno parte di una base, ma per il Teorema 3.2.2 dev'essere $n + 1 \leq n$: assurdo.

Per la 2., se (v_1, \dots, v_n) , (w_1, \dots, w_m) sono le due basi, interpretando i primi come vettori linearmente indipendenti e i secondi come una base, per il Teorema 3.2.2 dev'essere $n \leq m$; invertendo i ruoli delle due basi si ottiene $m \leq n$. Quindi $m = n$. \square

3.3 Dimensione

Definizione 3.3.1. Sia V un K -spazio vettoriale. La **dimensione di V** è uguale a n se V ha una base di n elementi. In tal caso ogni base di V è finita e composta da n vettori. Se invece V non ha basi finite, si dice che V ha dimensione infinita.

La dimensione di V si denota $\dim V$, o $\dim_K V$ se si vuole sottolineare qual è il campo base. Nel caso di dimensione infinita si scrive $\dim V = \infty$.

Esempio 3.3.2.

1. Lo spazio vettoriale nullo ha dimensione 0.
2. $\dim K^n = n$, perchè la base canonica $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ è composta da n vettori. In particolare $\dim_K K = 1$. Com'è fatta la base canonica?
3. $\dim M(m \times n, K) = mn$.
4. $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ (ma $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$).
5. $\dim_K K[t] = \infty$.

Proposizione 3.3.3 (Estrarre una base). *Sia V uno spazio vettoriale non nullo, sia v_1, \dots, v_n un suo sistema di generatori finito: i vettori v_1, \dots, v_n contengono una base.*

Dimostrazione. Induzione su n . Se $n = 1$, è vero, perchè l'unico generatore dev'essere non nullo, e quindi linearmente indipendente. Supponiamo vero l'asserto per $n - 1$ e lo dimostriamo per n . Per ipotesi v_1, \dots, v_n è un sistema di generatori: se sono linearmente indipendenti abbiamo finito; se non lo sono, uno è combinazione lineare dei rimanenti, supponiamo sia v_n . Allora anche v_1, \dots, v_{n-1} è un sistema di generatori (perchè?), e si conclude sfruttando l'ipotesi induttiva. \square

Corollario 3.3.4. *Ogni spazio vettoriale finitamente generato ha dimensione finita.*

Teorema 3.3.5. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita n .*

1. *Se v_1, \dots, v_n sono n vettori linearmente indipendenti, formano una base di V ;*
2. *se v_1, \dots, v_n generano V , sono una base di V .*

Dimostrazione. Per la 1. usare 3.2.2 e 3.2.3, e per la 2. usare 3.3.3 e 3.2.3. \square

Il precedente teorema è molto utile perchè permette di concludere che un certo insieme è una base, verificando solo che si tratta di vettori linearmente indipendenti, oppure solo di un sistema di generatori. Naturalmente bisogna sapere la dimensione dello spazio vettoriale in cui si lavora.

Usando l'Assioma della scelta, o il Lemma di Zorn, si può dimostrare che ogni spazio vettoriale ha una base, eventualmente infinita.

Esercizi 4.

1. Prolungare il vettore $(2, 0, 1)$ a una base di \mathbb{R}^3 .
2. Determinare la dimensione di $K[t]_{\leq i}$. Dopo aver verificato che 1 e $t - 1$ sono linearmente indipendenti, prolungarli a una base di $K[t]_{\leq 3}$.

Capitolo 4

Somma di sottospazi vettoriali

4.1 Dimensione di un sottospazio

Confrontiamo la dimensione di uno spazio vettoriale V di dimensione finita con quella di un suo sottospazio W .

Proposizione 4.1.1. *Se $\dim V$ è finita, anche W ha dimensione finita e $\dim W \leq \dim V$. Inoltre, se $\dim W = \dim V$ allora $W = V$.*

Dimostrazione. Se W non avesse dimensione finita, ci sarebbe in W una famiglia infinita di vettori linearmente indipendenti, ma questi sono anche vettori linearmente indipendenti di V , il che è assurdo. Quindi $\dim W$ è finita. Prendiamo una base di W (w_1, \dots, w_n) , questa è costituita da elementi linearmente indipendenti che appartengono a $W \subseteq V$, perciò per il Teorema 3.2.2 $\dim W \leq \dim V$. Se $\dim W = \dim V = n$ e (w_1, \dots, w_n) è una base di W , questi sono n elementi linearmente indipendenti di V , quindi per il Teorema 3.3.5 formano una sua base, in particolare generano V , quindi $W = V$. \square

4.2 Somma di sottospazi e relazione di Grassmann

Consideriamo U, W sottospazi vettoriali di un K -spazio vettoriale V .

Definizione 4.2.1. Il sottospazio somma di U e W , denotato $U + W$ è

$$U + W = \{u + w \in V \mid u \in U, w \in W\}.$$

È immediato verificare che $U + W$ è un sottospazio vettoriale di V (contiene il vettore nullo ed è chiuso rispetto a somma e prodotto esterno), ed è precisamente il sottospazio generato da $U \cup W$. Infatti si ha che $U \subseteq U + W$ e $W \subseteq U + W$, e se V' è un sottospazio vettoriale di V che contiene sia U sia W , poichè V' è chiuso rispetto alla somma, V' contiene anche $U + W$.

Il seguente importante teorema mette in relazione le dimensioni dei sottospazi $U, W, U + W, U \cap W$ nel caso di dimensione finita.

Teorema 4.2.2 (Relazione di Grassmann). *Sia V un K -spazio vettoriale di dimensione finita, $U, W \subseteq V$ suoi sottospazi. Vale la relazione:*

$$\dim U + \dim W = \dim(U + W) + \dim(U \cap W).$$

Dimostrazione. Iniziamo fissando una base del sottospazio più piccolo $U \cap W$, e prolungandola poi a basi di U e di W . Sia dunque (v_1, \dots, v_r) una base di $U \cap W$, $\dim(U \cap W) = r$. Poichè v_1, \dots, v_r sono vettori linearmente indipendenti che appartengono a U , possiamo prolungarli a una base di U : $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n)$; analogamente possiamo prolungarli a una base di W : $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_r, w_{r+1}, \dots, w_m)$, dove $n = \dim U$, $m = \dim W$.

Complessivamente abbiamo ora $r + (n - r) + (m - r) = n + m - r$ vettori di V : $v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n, w_{r+1}, \dots, w_m$. Osserviamo che tali vettori appartengono tutti a $U + W$; avremo finito se riusciremo a dimostrare che formano una base di $U + W$.

a) Dimostriamo che $v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n, w_{r+1}, \dots, w_m$ generano $U + W$. Se $u + w \in U + W$, con $u \in U, w \in W$, allora usando le basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ u, w si possono scrivere rispettivamente nella forma:

$$\begin{aligned} u &= \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} + \dots + \lambda_n u_n, \\ w &= \mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r + \mu_{r+1} w_{r+1} + \dots + \mu_m w_m. \end{aligned}$$

Dunque sommando e facendo i conti si ottiene:

$$u + w = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_r + \mu_r) v_r + \lambda_{r+1} u_{r+1} + \dots + \lambda_n u_n + \mu_{r+1} w_{r+1} + \dots + \mu_m w_m.$$

b) Dimostriamo che $v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, \dots, u_n, w_{r+1}, \dots, w_m$ sono linearmente indipendenti.

Consideriamo una loro combinazione lineare nulla:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \dots + \beta_n u_n + \gamma_{r+1} w_{r+1} + \dots + \gamma_m w_m = 0. \quad (4.1)$$

Osserviamo che il vettore $v := \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \dots + \beta_n u_n$ appartiene a U in quanto combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B} ; ma si ha anche $v = -\gamma_{r+1} w_{r+1} - \dots - \gamma_m w_m$, e quindi $v \in W$ in quanto combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B}' (con alcuni coefficienti nulli). Perciò $v \in U \cap W$, e quindi si può scrivere come combinazione lineare dei vettori della sua base inizialmente fissata: $v = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_r v_r$. Allora si ha:

$$\delta_1 v_1 + \dots + \delta_r v_r = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + \dots + \beta_n u_n$$

e quindi

$$\delta_1 v_1 + \dots + \delta_r v_r - \alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_r v_r - \beta_{r+1} u_{r+1} - \dots - \beta_n u_n = 0$$

ossia

$$(\delta_1 - \alpha_1) v_1 + \dots + (\delta_r - \alpha_r) v_r - \beta_{r+1} u_{r+1} - \dots - \beta_n u_n = 0;$$

essendo \mathcal{B} una base se ne deduce $\delta_1 - \alpha_1 = \dots = \beta_{r+1} = \dots = \beta_n = 0$. Allora la relazione (4.1) diventa $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_r v_r + \gamma_{r+1} w_{r+1} + \dots + \gamma_m w_m = 0$. Siccome \mathcal{B}' è una base si conclude che $\alpha_1 = \dots = \gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$. □

Esempio 4.2.3.

In \mathbb{R}^3 e in \mathbb{R}^4 per la posizione reciproca di due sottospazi vettoriali U, W di dimensione 2 (due piani) si possono presentare i seguenti casi:

n	$\dim(U \cap W)$	$\dim(U + W)$	posizione reciproca di U e W
3 o 4	2	2	$U = W$
3 o 4	1	3	incidenti lungo una retta
4	0	4	incidenti in un punto

4.3 Somma diretta

Definizione 4.3.1. La somma di due sottospazi U, W si dice **diretta** se $U \cap W = (0)$.

Se la somma di U e W è diretta la si denota $U \oplus W$; in questo caso per la relazione di Grassmann si ha $\dim U + \dim W = \dim(U + W)$.

In particolare V è somma diretta di due suoi sottospazi U, W se $V = U + W$ e $U \cap W = (0)$. Si scrive $V = U \oplus W$. In tal caso si dice che U e W sono sottospazi **supplementari**. Allora ogni vettore $v \in V$ si può esprimere **in maniera unica** nella forma $v = u + w$, con $u \in U, w \in W$. Infatti se $v = u + w = u' + w'$ con $u, u' \in U, w, w' \in W$, si ha $u - u' = w' - w$: tale vettore appartiene sia a U sia a W , ossia a $U \cap W = (0)$, e quindi $u = u', w = w'$, da cui l'unicità.

In particolare il vettore nullo si può scrivere solo nella forma $0 = 0 + 0$, cioè da $u + w = 0$, con $u \in U, w \in W$, segue $u = w = 0$.

La proprietà precedente si può anche invertire. Infatti:

Teorema 4.3.2. *Sia V un K -spazio vettoriale, U, W due suoi sottospazi. Allora $V = U \oplus W$ se e solo se ogni vettore v di V si scrive **in maniera unica** come $v = u + w$ con $u \in U, w \in W$.*

Dimostrazione. Un'implicazione è già stata dimostrata. Viceversa, supponiamo che ogni vettore v di V si scriva in maniera unica come $v = u + w$ con $u \in U, w \in W$. Chiaramente $V = U + W$; rimane da dimostrare che $U \cap W = (0)$: se ci fosse un vettore non nullo $u \in U \cap W$, allora si potrebbe scrivere $u = u + 0 = 0 + u$: questo contraddice l'unicità ipotizzata. \square

Proposizione 4.3.3. *Se $V = U \oplus W$ è uno spazio vettoriale di dimensione finita, unendo basi di U e di W si ottiene una base di V .*

Dimostrazione. Siano (u_1, \dots, u_r) una base di U , e (w_1, \dots, w_s) una base di W . Poiché $U \cap W = (0)$, le due basi sono disgiunte quindi la loro unione è composta da $r + s$ elementi; inoltre $\dim V = r + s$. Ogni elemento v di V si scrive come $v = u + w$, con $u \in U, w \in W$; u è combinazione lineare di u_1, \dots, u_r e w è combinazione lineare di w_1, \dots, w_s . Segue che $u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s$ generano V ; dal momento che sono in numero pari alla dimensione di V formano una sua base. \square

La definizione di somma di sottospazi si estende per induzione a una famiglia finita qualunque di sottospazi $\{W_i\}_{i=1, \dots, r}$ con $r \geq 2$. In tal caso si può usare una delle seguenti

notazioni: $W_1 + \dots + W_r = \sum_{i=1}^r W_i$. Gli elementi sono le somme di r addendi presi uno in ciascuno dei sottospazi W_1, \dots, W_r . E' il sottospazio generato dall'unione $\bigcup_{i=1}^r W_i$. Tale somma si dice diretta, e si scrive $W_1 \oplus \dots \oplus W_r$, oppure $\bigoplus_{i=1}^r W_i$, se ogni suo elemento ha un'unica espressione come somma di r elementi $w_1 \in W_1, \dots, w_r \in W_r$. La corrispondente condizione sull'intersezione risulta essere la seguente:

$$W_i \cap \left(\sum_{j \neq i} W_j \right) = (0)$$

per ogni $i = 1, \dots, r$. (Dimostrazione per esercizio per induzione su r .)

Esercizi 5.

1. Se (v_1, \dots, v_n) è una base di V , allora $V = \langle v_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle v_n \rangle$.
2. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita e $W \subset V$ è un sottospazio vettoriale, esiste un supplementare di W , cioè un altro sottospazio U tale che $V = U \oplus W$.