Def Siano U, W sottospazi vett. del $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V. La somma $U+W$ è detta somma diretta (interna) se $U \cap W = \{0_V\}$.

Scriviamo $U \oplus W \overset{def}{=} U+W$ se $U \cap W = \{0_V\}$.

Es 1) In $\mathbb{R}^2$ $U = \mathrm{Span}((1,-1))$, $W = \mathrm{Span}((2,3))$ sono in somma diretta infatti
$v \in U \cap W \Rightarrow v = \lambda(1,-1) = \mu(2,3) \Rightarrow$
$\lambda = \mu = 0 \Rightarrow v = 0_{\mathbb{R}^2}$ perché $(1,-1)$ e $(2,3)$ sono lin. indip. $\Rightarrow U \oplus W = \mathbb{R}^2$.

Teorema Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale e siano $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali. Allora
$U \cap W = \{0_V\} \Longleftrightarrow \forall\ v \in U+W$
$\exists!\ u \in U$ e $w \in W$ tali che $v = u+w$.

Dim $\boxed{\Leftarrow}$ $v \in U \cap W \rightsquigarrow v = v + 0_V = 0_V + v$
$\Rightarrow v = 0_V$ (altrimenti si scriverebbe in due modi diversi come somma di un vettore di U e di uno di W.

$\boxed{\Rightarrow}$ $v \in U+W$ e supponiamo $v = u+w = u'+w'$ con $u, u' \in U$, $w, w' \in W \Rightarrow u-u' = w'-w$
$\Rightarrow u-u' \in U \cap W \Rightarrow u-u' = 0_V \Rightarrow$
$u = u' \Rightarrow w = w'$.

OSS La somma $U + W$ è diretta se e solo se per $u \in U$, $w \in W$, $u + w = 0_V \implies u = w = 0_V$.

Più in generale, dati $U_1, \dots, U_n$ sottosp. vett. di V, diremo che $U_1, \dots, U_n$ sono in somma diretta se per $u_1 \in U_1, \dots, u_n \in U_n$

$$u_1 + \dots + u_n = 0_V \implies u_1 = \dots = u_n = 0_V .$$

In tal caso la somma $U_1 + \dots + U_n$ si denota con $U_1 \oplus \dots \oplus U_n$ (somma diretta).

Es 1) $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}(e_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{span}(e_n)$ dove $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

Se V è un $\mathbb{K}$-sp. vett. e $\{v_1, \dots, v_n\}$ è base per V, si ha analogamente

$$V = \mathrm{span}(v_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{span}(v_n).$$

Teorema Siano $U, W \subset V$ sottospazi vettoriali di V tali che $U \cap W = \{0_V\}$. Se $\{u_1, \dots, u_k\}$ è base per U e $\{w_1, \dots, w_h\}$ è base per W, allora $\{u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_h\}$ è base per $U \oplus W$.

Dim $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W = k + h$ per la formula di Grassmann. Inoltre $U \oplus W = \mathrm{span}(u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_h)$. Quindi sono base.

OSS $U, W \subset V$ sottosp. vett. in somma diretta $\iff$
$\dim(U+W) = \dim U + \dim W$.

Somma diretta (esterna)

Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali

Definiamo una struttura di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale sul prodotto cartesiano $V \times W$

1) somma: $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) \overset{def}{=} (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$

2) prodotto scalare: $\lambda (v, w) \overset{def}{=} (\lambda v, \lambda w)$

E' facile verificare che $V \times W$ con queste due operazioni è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale che denoteremo
$$V \oplus W$$

Il vettore nullo di $V \oplus W$ è $0_{V\oplus W} = (0_V, 0_W)$

Infatti: $(v, w) + (0_V, 0_W) = (v + 0_V, w + 0_W) = (v, w)$

Verifichiamo a titolo di esempio la proprietà distributiva:

$$\lambda\Big((v_1, w_1) + (v_2, w_2)\Big) = \lambda\,(v_1 + v_2, w_1 + w_2) =$$
$$= \big(\lambda(v_1 + v_2), \lambda(w_1 + w_2)\big) = (\lambda v_1 + \lambda v_2, \lambda w_1 + \lambda w_2) =$$
$$= (\lambda v_1, \lambda w_1) + (\lambda v_2, \lambda w_2) = \lambda(v_1, w_1) + \lambda(v_2, w_2).$$

Def Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.

Lo spazio vettoriale $V \oplus W = V \times W$ è chiamato somma diretta (esterna) di V e W.

In modo analogo, se $V_1, \dots, V_n$ sono $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, si definisce una struttura di $\mathbb{K}$-spazio vettoriale sul prodotto cartesiano

$$V_1 \times \dots \times V_n$$

ponendo

1) $(v_1, \dots, v_n) + (v_1', \dots, v_n') \stackrel{\text{def}}{=} (v_1 + v_1', \dots, v_n + v_n')$

2) $\lambda (v_1, \dots, v_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n)$

$V_1 \times \dots \times V_n$ con queste due operazioni è un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale chiamato <u>somma diretta</u> di $V_1, \dots, V_n$ e denotato anche con

$$V_1 \oplus \dots \oplus V_n = V_1 \times \dots \times V_n$$

Teorema Siano V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e siano $(v_1, \dots, v_n)$ una base per V e $(w_1, \dots, w_m)$ una base per W. Allora i vettori

$$(v_1, 0_W), \dots, (v_n, 0_W), (0_V, w_1), \dots, (0_V, w_m)$$

formano una base per $V \oplus W$.

Dim 1) $(v, w) \in V \oplus W \Rightarrow v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$,

$w = \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m \Rightarrow$

$$(v, w) = (v, 0_W) + (0_V, w) =$$

$$\alpha_1 (v_1, 0_W) + \dots + \alpha_n (v_n, 0_W) + \beta_1 (0_V, w_1) + \dots + \beta_m (0_V, w_m)$$

Quindi questi vettori generano $V \oplus W$.

2) $\alpha_1 (v_1, 0_W) + \dots + \alpha_n (v_n, 0_W) + \beta_1 (0_V, w_1) + \dots + \beta_m (0_V, w_m) = (0_V, 0_W)$

$\Rightarrow (\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m) = (0_V, 0_W) \Rightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0_V \\ \beta_1 w_1 + \dots + \beta_m w_m = 0_W \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \\ \beta_1 = \dots = \beta_m = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ questi vettori sono linearmente indip.

Pertanto sono una base.

Corollario Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione finita. Allora $V \oplus W$ ha dimensione finita e

$$\dim (V \oplus W) = \dim V + \dim W$$

Questo si generalizza al caso di un numero arbitrario finito di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali $V_1, \dots, V_n$

$$\dim (V_1 \oplus \dots \oplus V_n) = \dim V_1 + \dots + \dim V_n$$

OSS $V \times \{0_W\} \subset V \oplus W$ è un sottospazio vettoriale di $V \oplus W$. Analogamente $\{0_V\} \times W \subset V \oplus W$ è un sottospazio vettoriale.

Teorema $(V \times \{0_W\}) \oplus (\{0_V\} \times W) = V \oplus W$, dove la prima somma diretta è interna e la seconda è esterna.

Dim 1) $(V \times \{0_W\}) \cap (\{0_V\} \times W) = \{(0_V, 0_W)\}$

2) $(v, w) = (v, 0_W) + (0_V, w) \quad \forall (v, w) \in V \oplus W$.

Quindi le due nozioni di somma diretta, pur essendo diverse, sono collegate.

Esempi 1) $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ (somma diretta esterna)

$\mathbb{R}^2 = (\mathbb{R} \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathbb{R})$ (somma diretta interna)

2) $\mathbb{K}^{m+n} = \mathbb{K}^m \oplus \mathbb{K}^n = (\mathbb{K}^m \times \{0_{\mathbb{K}^n}\}) \oplus (\{0_{\mathbb{K}^m}\} \times \mathbb{K}^n)$

3) In $\mathbb{R}^3$, $U : x + 2z = 0$

$$W : \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$$

$U : \quad x = -2z \qquad \begin{cases} x = -2u \\ y = t \\ z = u \end{cases} \qquad \forall u, t \in \mathbb{R}$

$(x,y,z) \in U \iff (x,y,z) = (-2u, t, u) =$

$= u(-2,0,1) + t(0,1,0) \quad , \ u, t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow U = \operatorname{Span}\big((-2,0,1), (0,1,0)\big)$

$\Rightarrow \dim U = 2$

$W : \begin{cases} y = -x \\ z = 2x \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}$

$(x,y,z) \in W \iff (x,y,z) = t(1,-1,2) \Rightarrow$

$W = \operatorname{Span}\big((1,-1,2)\big) \Rightarrow \dim W = 1$

$U \cap W : \begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -x \\ z = 2x \\ x + 4x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow U \cap W = \{(0,0,0)\}$

$\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W = 3 \Rightarrow$

$U \oplus W = \mathbb{R}^3$ (somma diretta interna)