5 Novembre

Ω, regione del piano, è convessa se $\forall\, P_1, P_2 \in \Omega$, il segmento di estremi P_1 e P_2 è contenuto in Ω

Funzioni convesse $f: I \to \mathbb{R}$, I un intervallo

Una prima definizione è la seguente.

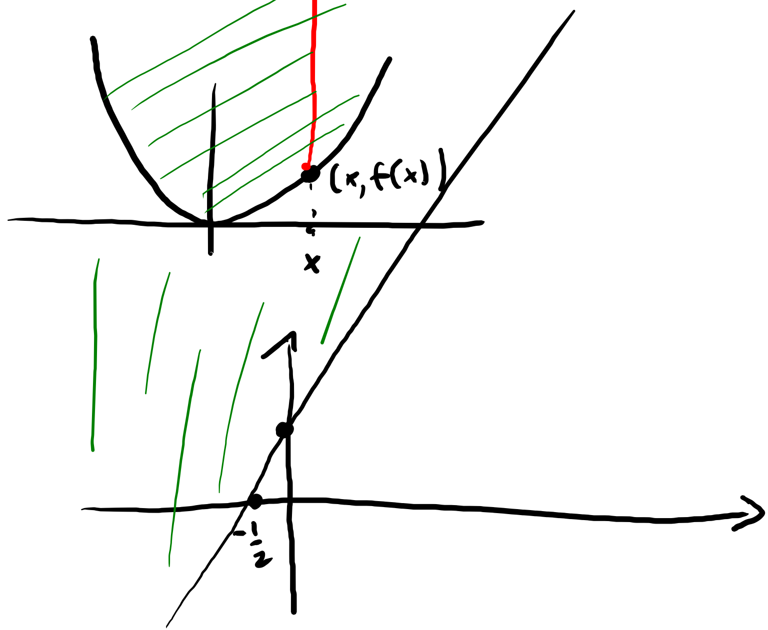
Def 1 $f: I \to \mathbb{R}$ è convessa se la regione del piano Ω_f che sta sopra il grafico è convessa

Qui

$$\Omega_f = \{ (x,y) : x \in I,\ y \geq f(x) \}$$

$f(x) = x^2$

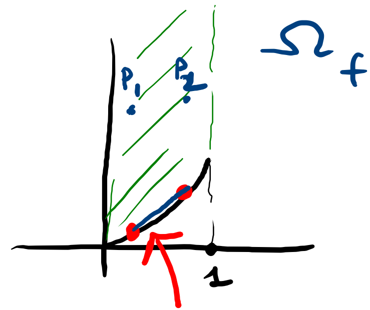
$I = \mathbb{R}$



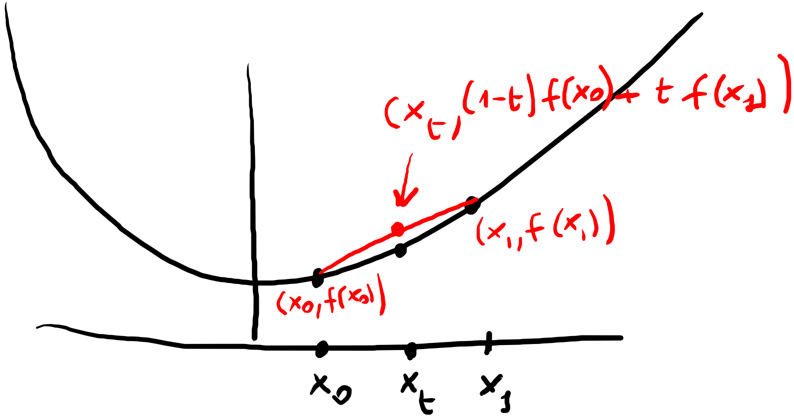
$f(x) = 2x+1$

$I = \mathbb{R}$

$f(x) = x^2 \qquad x \in [0,1]$



Una prima osservazione sulle funzioni convesse è che se devo verificare se dati due punti P_1, P_2 in Ω_f soddisfano la condizione sul segmento, è sufficiente considerare P_1 e P_2 sul grafico di f

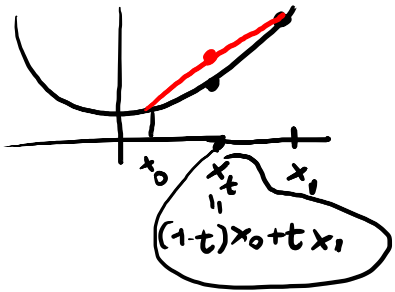


Dati i due punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$ posso rappresentare il segmento nella forma seguente: come la traiettoria

$$t \in [0,1] \longrightarrow \Big(\underbrace{(1-t)x_0 + t x_1}_{x_t} , \underbrace{(1-t)f(x_0) + t f(x_1)}_{\geq f(x_t)} \Big)$$

<u>Def 2</u> $f: I \to \mathbb{R}$ è convessa se $\forall\, x_0, x_1 \in I$ si ha

$$f\big((1-t)x_0 + t x_1\big) \le (1-t) f(x_0) + t f(x_1) \quad \forall \quad t \in (0,1)$$



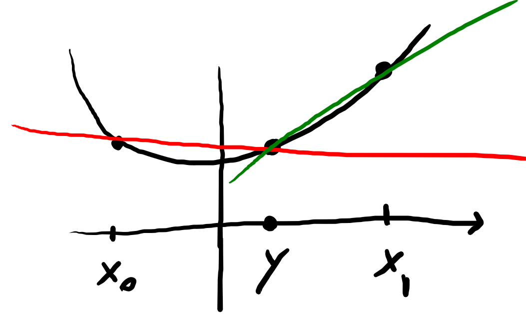
(se per ogni $x_0 \neq x_1$ in I ho

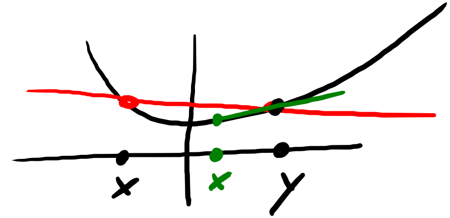
$$f\big((1-t)x_0 + t x_1\big) < (1-t) f(x_0) + t f(x_1)$$

$\forall\ t \in (0,1)$, allora f è strettamente convessa in I).

Def 3 f è convessa in I se per ogni coppia $x_0, x_1 \in I$ con $x_0 < x_1$ e per ogni $y \in (x_0, x_1)$ ho

$$\frac{f(x_0)-f(y)}{x_0-y} \le \frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y}$$





Def 4 f è convessa in I se $\forall\, y \in I$ la funzione

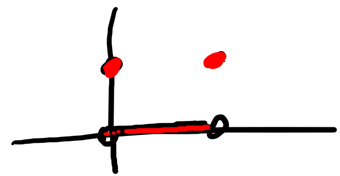
$$x \in I \setminus \{y\} \longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

è crescente

Lemma Sia $f: I \to \mathbb{R}$ e convessa in I. Allora, in ogni punto x_0 all'interno di I esistono $f'_s(x_0)$ e $f'_d(x_0)$ con $f'_s(x_0) \leq f'_d(x_0)$.

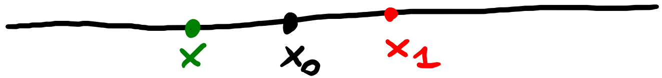
Osservazione Questo implica che all'interno dell'intervallo f è una funzione continua.

Esempio $$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 1 & x = 0, 1 \end{cases}$$



Dim lemma. Devo dimostrare che esistono e sono finiti

$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \quad e \quad \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$



Fisso un $x_1>x_0$ in I e considero $x<x_0$ in I.

So che $x \longrightarrow \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ è crescente e che per $x<x_0<x_1$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

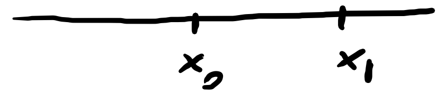
$$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \sup\left\{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} : x<x_0\right\}$$

$$\le \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \quad \forall$$

prefissato $x_1>x_0$

Segue che $f'_s(x_0)$ esiste e si ha $f'_s(x_0) \le \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

$\forall \; x_1 \in I$ con $x_1 > x_0$



$$\lim_{x_1 \to x_0^+} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \inf\left\{ \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} : x_1 > x_0 \right\} \ge f'_s(x_0)$$

Segue che esiste $f'_d(x_0)$ e si ha $f'_d(x_0) \ge f'_s(x_0)$

Lemma Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in (a,b). Sono equivalenti:

1) f è convessa in (a,b)

2) $f'(x)$ è crescente in (a,b).

Esempio Questo ci consente di concludere che $f(x)=x^2$ è convessa visto che $f'(x)=2x$ è crescente.

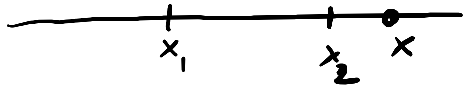
Dim 1) $\Rightarrow$ 2) Sia f convessa in (a,b) e siano $x_1<x_2$ due punti in (a,b). Dobbiamo dimostrare che $f'(x_1)\le f'(x_2)$

$$f'(x_1) = f'_s(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

Per $x < x_1 < x_2$ ho $$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\Longrightarrow f'(x_1) = \lim_{x \to x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Conclusione: per $x_1 < x_2$ ho $$\boxed{f'(x_1) \le \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}}$$



$$f'(x_2) = f'_d(x_2) = \lim_{x \to x_2^+} \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

sappiamo che $\dfrac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} \geq \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \quad \forall\ x_1 < x_2 < x$

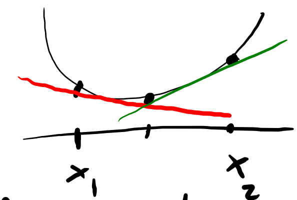
$$\Longrightarrow \quad f'(x_2) \geq \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq f'(x_1) \qquad \forall \quad x_1 < x_2$$

$$\Longrightarrow \quad f'(x_1) \leq f'(x_2) \qquad \forall \qquad x_1 < x_2$$

2) $\Rightarrow$ 1) Ora f' è crescente e dobbiamo dimostrare che f è convessa. Uno dei criteri di convessità è il seguente:

f è convessa se $\forall$ terna $x_1 < y < x_2$ si ha

$$\frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} \leq \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}.$$

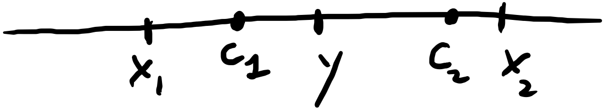


Presa una terna $x_1 < y < x_2$ applichiamo Lagrange ad f nei due intervalli $[x_1, y]$ e $[y, x_2]$

Esistono $c_1 \in (x_1, y)$ e $c_2 \in (y, x_2)$ t.c. $f'(c_1) = \frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y}$ e

$$f'(c_2) = \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$$

Quindi $\quad f'(c_1) = \dfrac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y}$ e $f'(c_2) = \dfrac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y}$



$$c_1 < y < c_2$$

Ma ora, siccome f' è crescente, si ha $f'(c_1) \le f'(c_2)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(x_1)-f(y)}{x_1-y} \le \frac{f(x_2)-f(y)}{x_2-y} \qquad \forall \quad x_1 < y < x_2 .$$

$\Longrightarrow$ f è convessa.

Corollario ~~Data~~ $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ t.c. $f''(x)$ esiste $\forall x\in(a,b)$.

Sono equivalenti

1) f è convessa in (a,b)

2) $f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in(a,b)$

Dim 1) $\Rightarrow$ 2) Se f è convessa allora f' è crescente

$\Rightarrow f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in(a,b)$.

2) $\Rightarrow$ 1) $f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in(a,b) \Rightarrow f'$ è crescente in $(a,b) \Rightarrow$

f è convessa in (a,b).

$f(x) = x^2$ $\qquad$ $f'(x) = 2x$ $\qquad$ $f''(x) = 2 > 0$

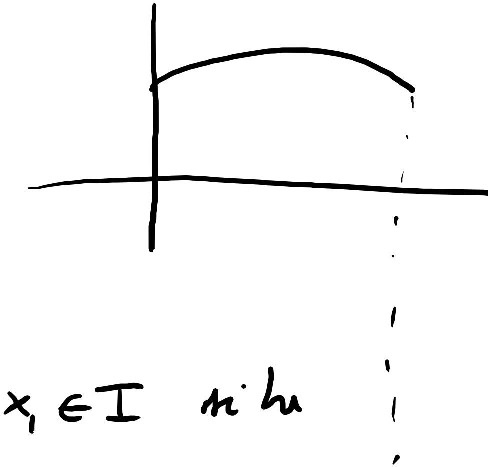
$f(x) = e^{x^2}$ $\qquad$ $f'(x) = 2x e^{x^2}$

$$f''(x) = \left(2x e^{x^2}\right)' = 2\left(x e^{x^2}\right)' = 2\left(e^{x^2} + x \; 2x e^{x^2}\right) =$$

$$= 2 e^{x^2}\left(2x^2 + 1\right) > 0 \qquad \forall x.$$

Funzioni concave

Def 1 $f: I \to \mathbb{R}$ è concava se la regione sotto il grafico è convessa



Def 2 $f: I \to \mathbb{R}$ è concava se $-f$ è convessa in I

Def $f: I \to \mathbb{R}$ e concava se $\forall\ x_0, x_1 \in I$ si ha

$$f((1-t)x_0 + t x_1) \geq (1-t) f(x_0) + t f(x_1) \quad \forall\ t \in (0,1)$$

<u>Teor</u> 1) Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile in (a,b). Allora

f è concava in (a,b) se e solo se f' è decrescente in (a,b)

2) Se $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ è tale che $f''(x) \overset{\text{esiste}}{\cancel{\exists}}$ $\forall x\in(a,b)$ allora

f è concava in (a,b) se e solo se $f''(x)\le 0$ $\forall\, x\in(a,b)$.