TEOREMA DI ROLLE

- Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, derivabile in $]a,b[$ e $f(a) = f(b)$.

Allora $\exists\ s \in]a,b[$ t.c. $f'(s) = 0$.

DIM

f è continua nell'insieme compatto $[a,b]$, quindi per il TH di Weierstrass
f ha massimo e minimo in $[a,b]$, cioè $\exists \max f = f(x_1)$ e $\min f = f(x_2)$
Se $x_1 = a$ e $x_2 = b \to \max f = \min f$ perché $f(a) = f(b)$, quindi f è
costante e $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a,b[$.
Se x_1 o x_2 è all'interno dell'intervallo $]a,b[\to$ per il TH Fermat la
derivata in questo punto è 0.
$\Rightarrow$ In conclusione la derivata si annulla in almeno un punto //

ES:

f non derivabile $\quad f(x) = |x|$ in $[-1,1]$
$f(-1) = f(1) = 1$
non esiste $s \in]-1,1[$ tale che $f'(s) = 0$
non esiste $f'(0)$

ES:

$f(x) = x$ in $[-1, 1]$

$f(-1) = -1 \neq f(1) = 1$

$f'(x) = 1 \quad \forall\, x \in]-1, 1[$

non vale perchè $f(a) \neq f(b)$

ES:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{in }]-1, 1[\\ 0 & \text{in } x = 1 \vee x = -1 \end{cases}$$

f non continua

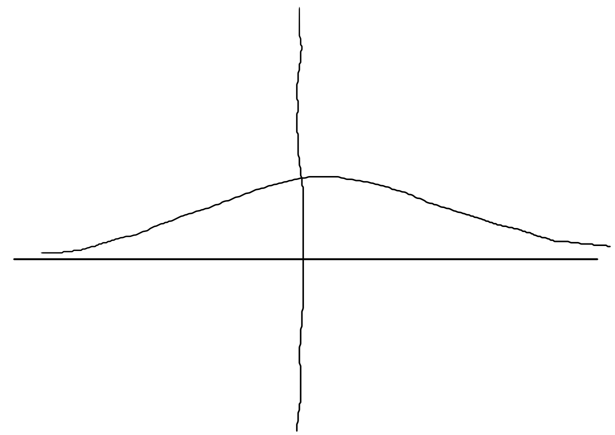
non esiste $s \in]-1, 1[$ tale che $f'(s) = 0$

ES:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x)$

f è derivabile



TEOREMA di CAUCHY

Siano $f(x)$ e $g(x)$ continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$

Allora esiste $c \in]a,b[$ tale per cui valga:

$$f'(c) \cdot (g(b) - g(a)) = g'(c) \cdot (f(b) - f(a))$$

Se inoltre valgono $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a,b[$

allora si può riscrivere come: ?

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

dim

(Utilizziamo Rolle)

Prendiamo $\varphi : [a,b] \to R$ definita da

$$\varphi(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)]$$

$\varphi(x)$ continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$

$$\varphi(x) = g(x)[f(b) - f(a)] - f(x)[g(b) - g(a)]$$

$$\varphi(a) = g(a)[f(b) - f(a)] - f(a)[g(b) - g(a)]$$
$$= g(a)f(b) - g(a)f(a) - f(a)g(b) + f(a)g(a)$$
$$= g(a)f(b) - f(a)g(b)$$

$$\varphi(b) = g(b)[f(b) - f(a)] - f(b)[g(b) - g(a)]$$
$$= g(b)f(b) - g(b)f(a) - f(b)g(b) + f(b)g(a)$$
$$= f(b)g(a) - g(b)f(a)$$

$$\varphi(a) = \varphi(b)$$

φ soddisfa Rolle

Allora esiste $c \in]a,b[$ tale che

$$\varphi'(c) = g'(c)[f(b) - f(a)] - f'(c)[g(b) - g(a)] = 0$$
$$g'(c)[f(b) - f(a)] = f'(c)[g(b) - g(a)]$$

Supponiamo $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$

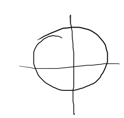
in particolare $g'(c) \neq 0$,

quindi per Rolle $g(b) \neq g(a)$

$$\boxed{\boxed{\frac{f'(c)}{g'(c)}} = \boxed{\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}}}$$

$\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ curva

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

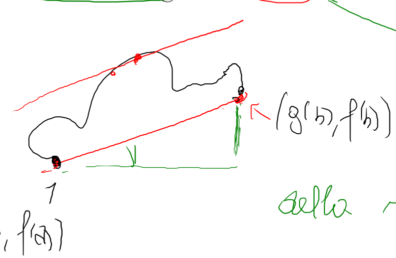


$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (g(t), f(t))$

$\gamma'(t) = (g'(t), f'(t))$

vettore tangente



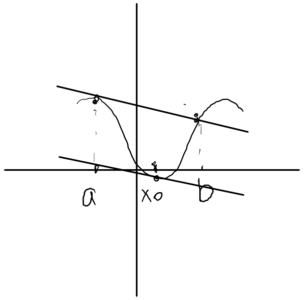
$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ è il coeff angolare della retta che congiunge gli estremi della curva

TEOREMA DI LAGRANGE

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$

f continua in $[a,b]$

derivabile in $]a,b[$



Allora $\exists x_0 \in]a,b[$ t.c.

$$f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

DIM

poniamo $g : [a,b] \to \mathbb{R}$

$g(x) = x$

per T. Cauchy $\exists x_0 \in]a,b[$ t.c. $[f(b)-f(a)] \cdot g'(x_0) = f'(x_0)[g(b)-g(a)]$

$g'(x)=1 \quad \rightsquigarrow \quad [f(b)-f(a)] \cdot 1 = f'(x_0) \cdot (b-a)$

$$\to f'(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Formula del valor medio

$f : I \to \mathbb{R}$

f derivabile su I

$x_0 \in I$

Allora $\forall x \in I \ \exists \xi \in I$ t.c. $|\xi - x_0| < |x - x_0|$

e si ha $f(x) = f(x_0) + f'(\xi) \cdot (x - x_0)$

DIM

sia $x > x_0$

consideriamo $a = x_0$ e $b = x$

$\exists \xi \in]x_0, x[$ t.c.

$$f'(\xi) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Sia $x < x_0$

consideriamo $a = x$ e $b = x_0$

$\exists \xi \in]x, x_0[$ t.c.

$$f'(\xi) = \frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$\to f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$

ES:

dimostriamo t. di Heine - Cantor nel caso in cui $f \in C^1([a,b])$

vogliamo dimostrare che f unif. continua $\rightsquigarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ t.c. $|x_1 - x_2| < \delta$ allora $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

DIM $\quad x_1 < x_2$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)(x_1 - x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| < K|x_1 - x_2| < \varepsilon$$

$\xi \in \,]x_1, x_2[$

$\exists K$ t.c. $|f'(x)| < K \quad \forall x \in [x_1, x_2]$ $\qquad \delta \leq \frac{\varepsilon}{K}$

TEOREMA SULLE FUNZIONI A DERIVATA NULLA $I \subseteq \mathbb{R}$ I intervallo

$f: I \to \mathbb{R}$ f derivabile su I.

$f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$.

Allora f è COSTANTE.

DIM.

Supponiamo per assurdo che f non sia costante. (*)

$\exists x \in I \ f'(x) \neq 0$. (Sia $[a,b] \subseteq I$, quindi f è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$) f non costante significa che

(*) $\exists\ a, b \in I : f(a) \neq f(b)$.

Riprendendo il TH. LAGRANGE $\exists\, \xi \in\,]a,b[: \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

$f'(\xi) \neq 0$. Quindi $\exists\, \xi \in I$ e $f'(\xi) \neq 0$.

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \frac{x}{|x|}$ $\quad f'(x) = 0 \quad \forall x$

f non è costante

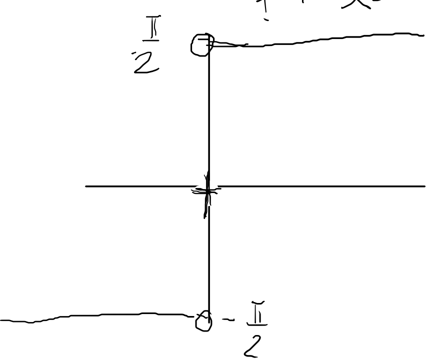
ES.

$f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

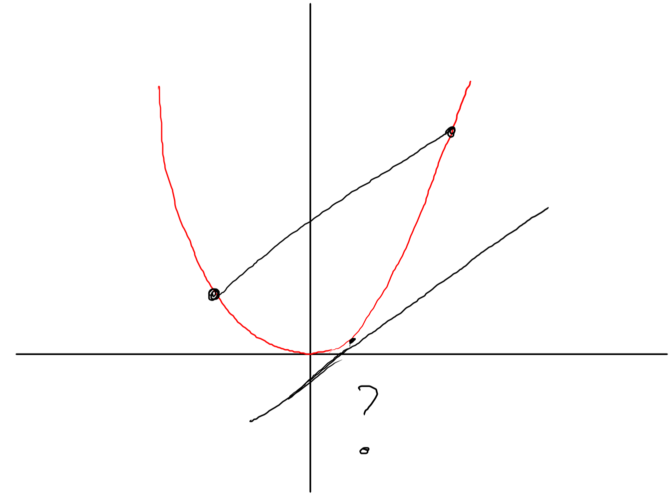
$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\frac{x^2+1}{\cancel{x^2}}} \cdot \frac{1}{\cancel{x^2}} = 0$



parabola $\quad f(x) = a x^2$

$(x_1, f(x_1)) \qquad (x_2, f(x_1)) \qquad x_1 < x_2$



$\exists\ \xi \in\ ]x_1, x_2[$ tale che

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ξ è un punto di Lagrange

$a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$

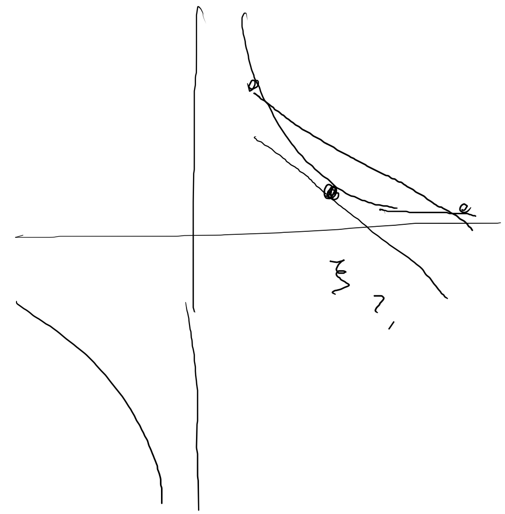
$$f'(x) = 2ax \qquad 2\cancel{a}\,\xi = \frac{a x_2^2 - a x_1^2}{x_2 - x_1} = \cancel{a}\cdot(x_1 + x_2) \rightsquigarrow \xi = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

punto medio

iperbole $f(x) = \frac{a}{x} \quad x > 0$

$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$

$0 < x_1 < x_2$



$\exists\ \xi \in]x_1, x_2[$ t.c.

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$\xi = \sqrt{x_1 x_2}$$

$$-\frac{a}{\xi^2} = \frac{\frac{a}{x_2} - \frac{a}{x_1}}{x_2 - x_1} \Rightarrow \cancel{-}\frac{1}{\xi^2} = \frac{\cancel{x_1 - x_2}}{x_1 x_2 (\cancel{x_2 - x_1})} \Rightarrow$$

media geometrica