Esempio di studio di una funzione

$f(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2$ $\quad$ $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ $\quad$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polinomio di grado 4

$f \in C^\infty(\mathbb{R}) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C^n(\mathbb{R})$ $\quad$ $C^\infty(E)$

$\underline{f(x) = 0}$ $\quad$ $3x^2 - 2x + 1$ $\quad$ $f'(x) = 6x - 2$ $\quad$ $f''(x) = 6$ $\quad$ $f'''(x) = 0$ $\quad$ $f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall n \geq 4$

$\lim_{x \to \pm\infty} \underline{f(x) = -\infty}$ $\quad$ $f(0) = 0$ $\quad$ $f(x) = -x^2(x^2 - 2x + 1) = \underline{-x^2(x-1)^2}$

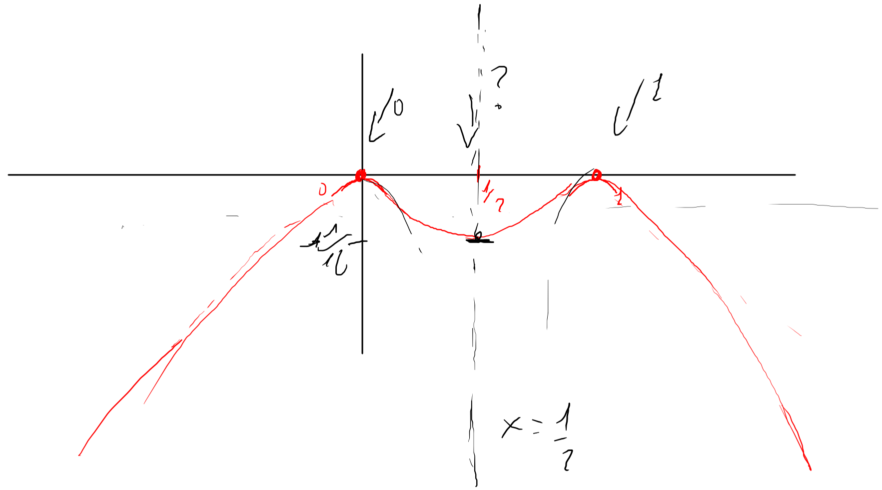
0 zero doppio

$f(1) = 0$ 1 zero doppio

$x = \frac{1}{2}$ $\quad$ $-\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{16}$

$\underline{f(x) \leq 0}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\operatorname{im} f = f(\mathbb{R}) =]-\infty, 0]$ (per il teorema di connessione)

$\max f = 0$



0 e 1 sono punti di massimo assoluto

$\exists$ un punto di minimo fra 0 e 1

$f(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2$

$f'(x) = -4x^3 + 6x^2 - 2x = -2x(2x^2 - 3x + 1)$
$= -2x(x-1)\,q(x)$

[Si dice punto critico per una funzione derivabile f un punto x_0 dove $f'(x_0) = 0$]

$f'(x) = -2x(x-1)(2x-1)$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{16}$

$x = 0, \quad x = 1, \quad x = \frac{1}{2}$

$q(x) = 2x + b$

$(x-1)(2x+b) = 2x^2 - 3x + 1$

$2x^2 + bx - 2x - b \Rightarrow b = -1$

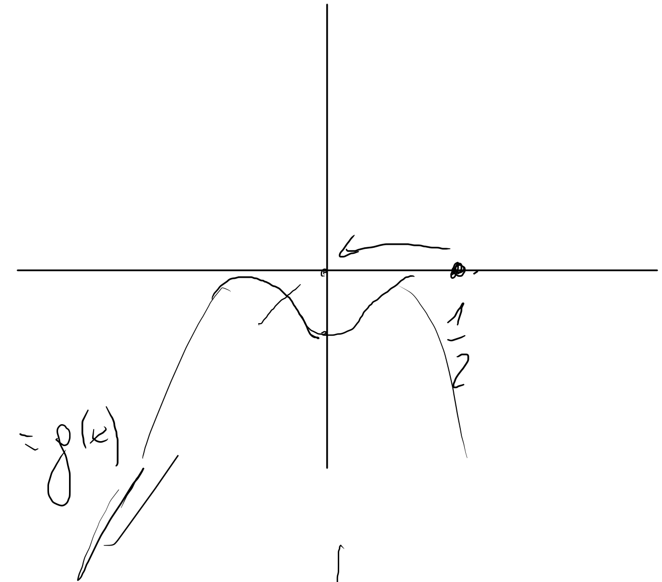
$$f(x) = -x^4 + 2x^3 - x^2 = -x^2(x-1)^2$$

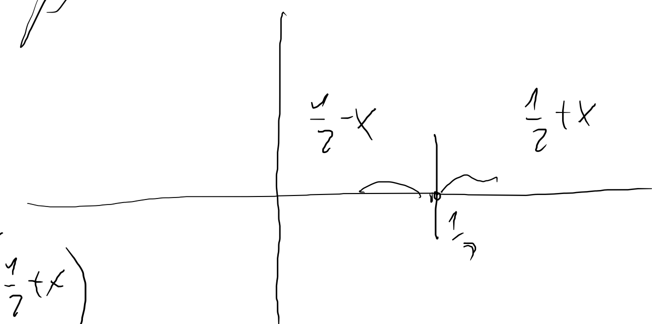
è simmetrico rispetto all'asse $x = \frac{1}{2}$?

$$g(x) = f\left(x+\frac{1}{2}\right) = -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

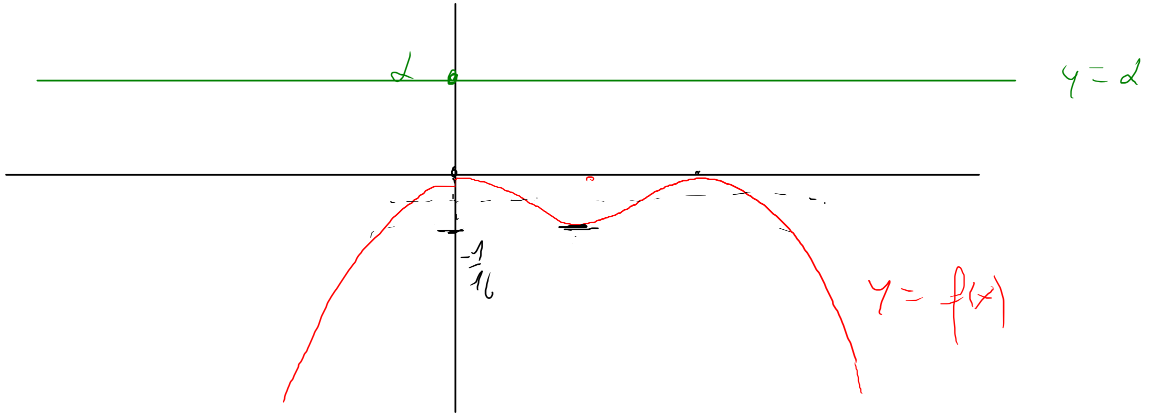
$$g(-x) = -\left(-x+\frac{1}{2}\right)^2\left(-x-\frac{1}{2}\right)^2 = -\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 = g(x)$$

$$\left[-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2 \qquad \left[-\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2$$





$$f\left(\frac{1}{2}-x\right) \overset{?}{=} f\left(\frac{1}{2}+x\right)$$



Si determini il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x)=\alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$

se $\alpha > 0$ $\emptyset$ soluzioni

se $\alpha = 0$ 2 soluzioni

se $-\frac{1}{16} < \alpha < 0$ 4 soluzioni

se $\alpha = -\frac{1}{16}$ 3 soluzioni

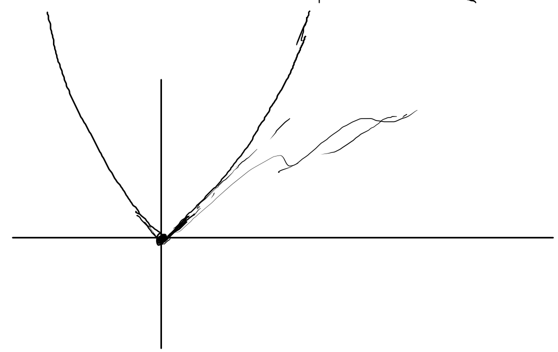
se $\alpha < -\frac{1}{16}$ 2 soluzioni

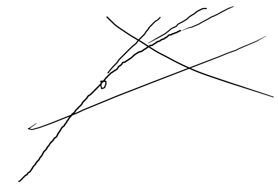
Es: $f(x) = x^2 + \operatorname{sen}|x|$ $\cancel{|x|^2}$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ f continua su $\mathbb{R}$ e derivabile almeno su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

f è pari $\operatorname{sen}\left(\left|\frac{3}{2}\pi\right|\right) = -1 < 0$

Studiamo f su $[0,+\infty[$ $g(x) = x^2+\operatorname{sen}x$ $g = f|_{[0,+\infty[}$





$g \in C^\infty([0,+\infty[)$

$g'(x) = 2x+\cos x$ $g'(0)=1$

$[x\geq 0]$ quindi f non è derivabile in 0 $f'_-(0) = -1$

$g'(x)=0$ $2x+\cos x = 0$ $g''(x) = 2-\operatorname{sen}x \geq 1 > 0$

quindi $g'(x)$ è crescente. $\min g'(x) = g'(0) = 1 \Rightarrow g'(x)\geq 1>0$ $\forall x\in[0,+\infty[$

$g':[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ $\Rightarrow g$ è crescente

Osserviamo che 0 è punto di minimo (assoluto) per f
ma f non ha punti critici (f non è derivabile in 0)

Teorema

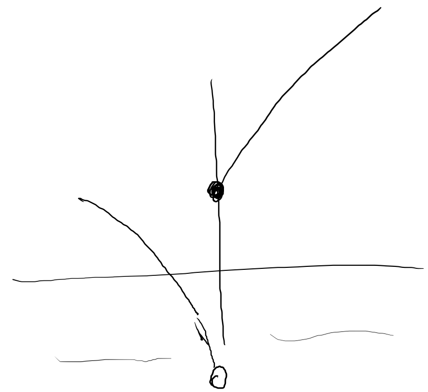
Sia $a < x_0 < b$, f derivabile su $]a,b[\setminus \{x_0\}$,
f continua su $]a,b[$.

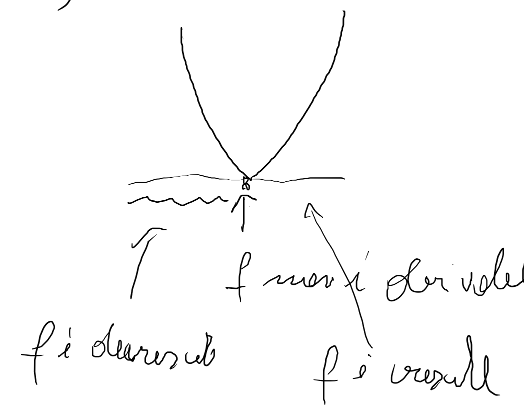
Sia $f'(x) \overset{\leq 0}{\geq} 0 \quad \forall x \in]a, x_0[$

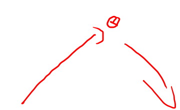
$f'(x) \overset{> 0}{\leq} 0 \quad \forall x \in]x_0, b[$

minimo

Allora x_0 è punto di massimo per f.







Dim

$f'(x) \geq 0$ su $]a, x_0[$ quindi f è crescente su $]a, x_0[$

$f'(x) \leq 0$ $]x_0, b[$ decrescente su $]x_0, b[$

$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ (f è continua in x_0)

crescente

Sia $x_1 < x_0$; allora $\forall x$ con $x_1 < x < x_0$ si ha $f(x_1) \leq f(x)$

$$f(x_1) = \lim_{x \to x_0^-} f(x_1) \leq \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

$\Rightarrow \forall x_1 < x_0$ si ha $f(x_1) \leq f(x_0)$

Sia $x_2 > x_0$ allora $\forall x$ con $x_0 < x < x_2$ si ha $f(x) > f(x_2)$

e quindi $\lim_{x \to x_0^-} f(x) \geq f(x_2)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ " $f(x_0)$

quindi $\forall x_2 > x_0$ si ha

$f(x_0) \geq f(x_2)$ $\qquad$ quindi $f(x_0) = \max f$

ASINTOTI OBLIQUI

$]-\infty, a]$

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a, +\infty[$ $\quad f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$

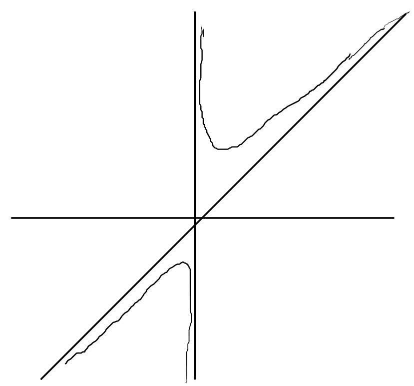
Una retta di equazione $y = mx + q$ è un asintoto di f per $x \to +\infty$ se
$x \to -\infty$

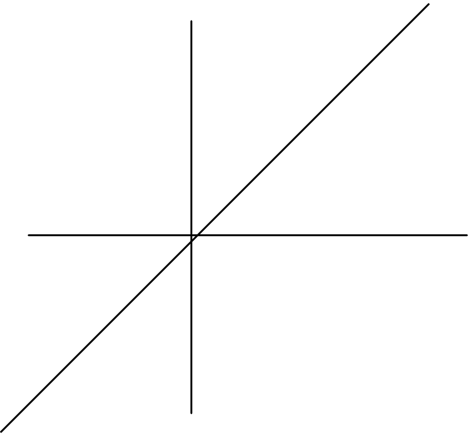
$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \to -\infty}} [f(x) - mx - q] = 0$$

(Sia $g: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ diremo che f e g sono asintotiche per $x \to +\infty$ se

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$)

Es $f(x) = x + \frac{1}{x}$



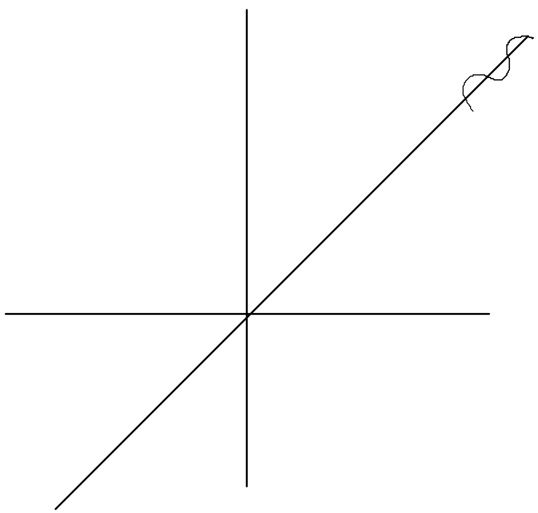


$$f(x) = x + \sin x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - g(x) \right] \qquad \lim_{x \to +\infty} \left[\cancel{x} + \sin x - \cancel{x} \right]$$

$$f(x) = x + \frac{\sin x}{x} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left[x + \frac{\sin x}{x} - x \right] = 0$$

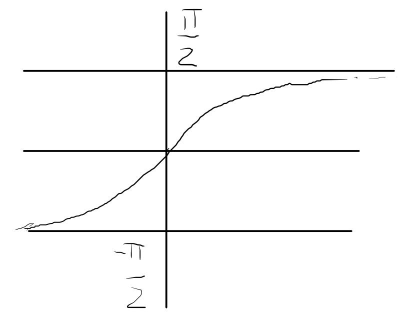
$y = x$ è asintoto obliquo



$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$y = \alpha$ asintoto obliquo

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$



$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$ Vera

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - mx - q}{x} = 0$$ → a maggior ragione tende a 0

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{m\cancel{x}}{\cancel{x}} - \overbrace{\frac{q}{x}}^{0} \right] = 0$$

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] \longrightarrow \text{Poiché } \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

Teorema

Sia $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ con $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$ e sia $y = mx + q$ asinto obliquo per f $x \to +\infty$

allora $\exists \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx = q]$

TEOREMA

Sia $f: [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ con $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$ e sia $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ e $q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]$

allora $y = mx + q$ è asintoto obliquo di f $x \to +\infty$

Dim

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx - q] = 0$$

ES.

$$f(x) = x \cdot \log x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = \quad +\infty \quad \nexists \text{ asintoto}$$

E

$$f(x) = \frac{2x^2 - x}{x+1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{2x^2 - x}{x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2 - x}{x^2 + x} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(2 - \overset{0}{\frac{1}{x}}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 + \underset{0}{\frac{1}{x}}\right)} = 2 \quad \text{se } \exists \text{ asintoto } m = 2$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2x^2 - x}{x+1} - 2x \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - x - 2x^2 - 2x}{x+1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-3x}{x+1} = -3 \quad \exists \text{ asintoto}$$

$$y = 2x - 3$$

$$f(x) = \log(e^x + x)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\log(e^x+x)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\log e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\overset{x}{\log e^x} + \log\left(1+\frac{x}{e^x}\right)}{x} = 1 \qquad m=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log(e^x+x) - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(e^x\left(1+\frac{x}{e^x}\right)\right) - x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\log e^x + \log\left(1+\frac{x}{e^x}\right) - x\right] = 0$$

$$y = x$$

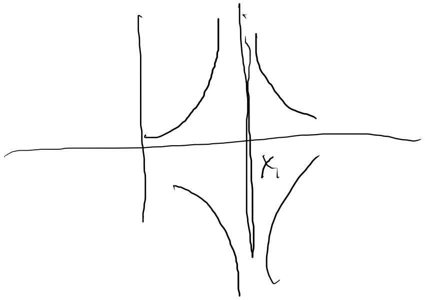
⚠ $f(x) = x + \operatorname{sen} x$ $\qquad m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

$$q = \lim_{x\to+\infty} \left[(x+\operatorname{sen}x) - x \right] = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x \quad \nexists \; !!$$

Non esiste asintoto

Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ si dice che la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto verticale

$x_0 \in \mathbb{R}$



I Teoremi ~~di~~ de l'Hôpital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = ?$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6}$$

CASO $0/0$ con $x_0 \in \mathbb{R}$

ENUNCIATO

Siano $f, g :]a,b[\to \mathbb{R}$

siano f e g derivabili in $]a,b[$ eccetto al più in x_0, con $x_0 \in [a,b]$

Supponiamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ e $g'(x) \neq 0$ $\forall x \neq x_0$

Se $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ con $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ allora $\exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

DIMOSTRAZIONE Supponiamo $x_0 \neq b$

Ridefiniamo f e g ponendo $f(x_0) = 0$ e $g(x_0) = 0$

per far sì che queste nuove funzioni siano continue nell'intervallo.

Fisso $x \in [a,b]$ $x > x_0$ e considero l'intervallo $[x_0, x]$

Per il teorema di Cauchy applicato alle funzioni f e g ristrette all'intervallo $[x_0, x]$

allora $\exists$ $c \in]x_0, x[$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \ \pm\infty \qquad g'(x) \neq 0 \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \ \pm\infty$$

localmente (in x_0)

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Es:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}^{= f(x)}}{\underbrace{x^3}_{= g(x)}} = \frac{1}{6} \Leftarrow$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\overbrace{e^x - 1 - x}}{\underbrace{3x^2}} = \frac{1}{6} \Leftarrow \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{6x} = \frac{1}{6}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} \cancel{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1-\cos x} \quad \text{non esiste!}$$

??

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\frac{\sin x}{x}\right)} = 1$$

✓

NO

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{?}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{l'H}{\Longleftarrow} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \overset{l'H.}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \overset{l'H}{=}$$

$$\overset{l'H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{|x|}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\cancel{x}} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\,(e^x - x - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{\operatorname{sen}^2 x\,(1 - \cos x)} \cdot \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{x^4}\ 3} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\to 1$ $\quad \to 2$

$$= \frac{(e^x - x - 1)(\sqrt{1+x} - 1)}{x^3} = \frac{e^x - x - 1}{x^2} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}}_{\to \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \overset{\text{l'H.}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg}(x) \cdot \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{sen}(x) \cdot \boxed{\frac{x - \frac{\pi}{2}}{\cos(x)}}$$

$\operatorname{sen}(x) \to 1$

-1

$$\text{l'H.} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{-\sin x} = -1$$

"forme indeterminate" = $\frac{0}{0}$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$

$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty$

$0^0 \qquad \infty^0 \qquad 1^\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[x - \sqrt[3]{x^3 - x^2} \right] =$$

$$\infty - \infty$$

$$f(x) - g(x) = \underset{+\infty}{f(x)} \left[1 - \frac{g(x)}{f(x)} \right]$$

?

$$= g(x) \left[\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x \left[1 - \frac{\sqrt[3]{x^3 - x^2}}{x} \right]$$

$$\lim_{x \to +\infty} x \left[1 - \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \sqrt[3]{1 - 1/x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{1 - y} - 1}{-y} =$$

$$= \lim_{z \to 0^-} \frac{(1+z)^{\frac{1}{3}} - 1}{z} = \frac{1}{3}$$