

$$\begin{vmatrix} K_1 + K_2 - m_1 \omega^2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

ω_1^2, ω_2^2 : AUTOVALORI GENERALIZZATI
DELLA MATRICE CHE GOVERNA
IL PROBLEMA DELLE OSCILL. LIBERE.

17/11/2021

$$(K_1 + K_2 - m_1 \omega^2)(K_2 - m_2 \omega^2) - K_2^2 = 0$$

$$m_1 m_2 \omega^4 - m_1 \omega^2 K_2 - m_2 \omega^2 (K_1 + K_2) + (K_1 + K_2) K_2 - K_2^2 = 0$$

$$\omega^4 - \left(\frac{K_1 + K_2}{m_1} + \frac{K_2}{m_2} \right) \omega^2 + \frac{K_1 K_2}{m_1 m_2} = 0 \Rightarrow \text{BIQUADRATICA e QUINDI DETERMINO}$$

2 SOLUZIONI DEL TIPO ω_1^2, ω_2^2

$\omega_1 < \omega_2 \Rightarrow \omega_1$ È LA PULSAZ. FONDAMENTALE DEL SISTEMA

$\omega_1 \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$; PERIODO FONDAMENTALE DEL SISTEMA

$$T_1 > T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

Riconsidero il sist. che ho risolto e noto che lo posso scrivere così

$$\det \left(\underbrace{\begin{bmatrix} K_1+K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{K}} - \omega^2 \underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\tilde{M}} \right) = 0 \quad ; \quad \det \left(\tilde{K} - \omega^2 \tilde{M} \right) = 0$$

ω^2 : AUTOVL GENERALIZZ.
DEL PROBLEMA

$$\det (\tilde{A} - \lambda \tilde{I}) = 0$$

λ è autovl di
 $\tilde{A}$ $\hookrightarrow$ *eigenvalue*

$\Rightarrow$ AUTOVETTORI? $\omega_1 \Rightarrow U^{(1)}$
 $\omega_2 \Rightarrow U^{(2)}$ $\Rightarrow$ MODI DI VIBRAZIONE
DELLA STRUTTURA

$U^{(1)}$?

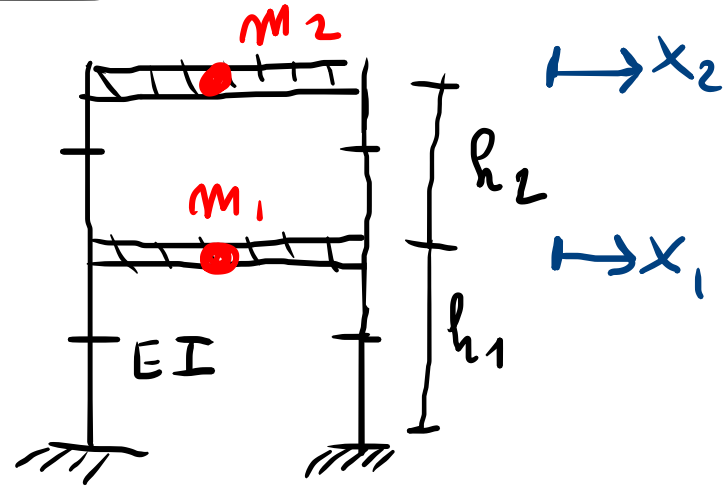
$$\begin{cases} [(K_1+K_2) - \omega_1^2 m_1] U_1^{(1)} - K_2 U_2^{(1)} = 0 \\ -K_2 U_1^{(1)} + (K_2 - \omega_1^2 m_2) U_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

sist singolare: eq lin dipendenti $\Rightarrow$ ne uso solo una che mi serve
per determinare $U_2^{(1)} = f(U_1^{(1)})$ (AUTOV. NOTI A MENO DI UNA COSTANTE)

$$\left(\begin{bmatrix} \cdot & \tilde{K}^x \\ \cdot & \tilde{K}_x \end{bmatrix} - \omega_1^2 \begin{bmatrix} \cdot & \tilde{M}^x \\ \cdot & \tilde{M}_x \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{bmatrix} = 0$$

Allo stesso modo sostituisco w_2 nel sist e ottengo $U_2^{(2)} = g(U_1^{(2)})$.

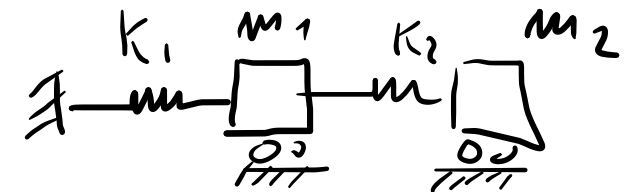
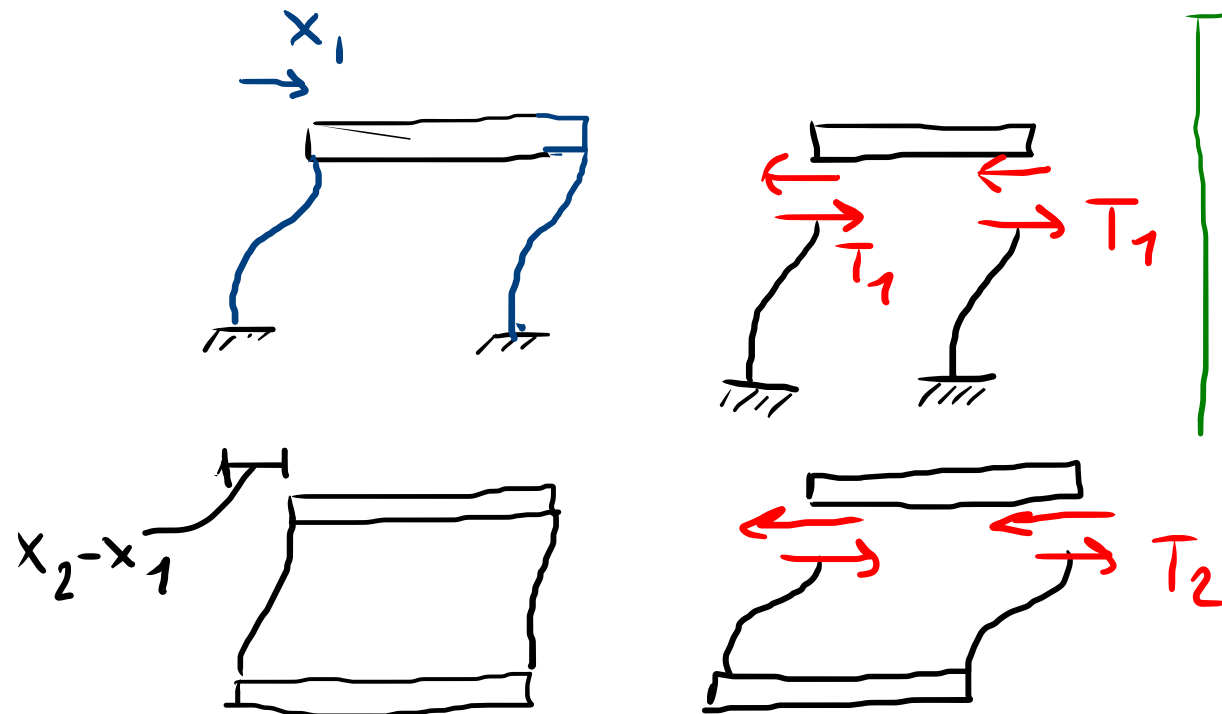
ESEMPIO



$$T_1 = \frac{12 EI}{h_1^3} x_1$$

$$2T_1 = \frac{24 EI}{h_1^3} x_1$$

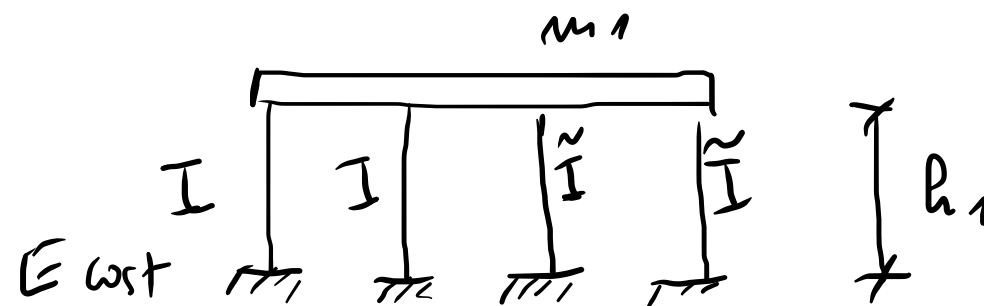
$$2T_2 = \frac{24 EI}{h_2^3} (x_2 - x_1)$$



$$\delta = \frac{F h^3}{12 EI}$$

$$F = \frac{12 EI \delta}{h^3}$$

$$K_{TOT} = \frac{24 EI}{h_1^3} + 24 \frac{EI}{h_1^3}$$



Nell'es $h_1 = h_2 \Rightarrow K_1 = K_2 = K$, e $m_1 = m_2 = m$

$$\omega_1 = 0.618 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$T_1 = 10.166 \sqrt{\frac{m}{K}}$$

$$\omega_2 = 1.618 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$T_2 = 3.883 \sqrt{\frac{m}{K}}$$

I AUTOVET. $U^{(1)}$

$\Rightarrow$

$$U_1^{(1)} = 0.618 U_2^{(1)}$$

II AUTOVET. $U^{(2)}$

$\Rightarrow$

$$-0.618 U_1^{(2)} = U_2^{(2)}$$

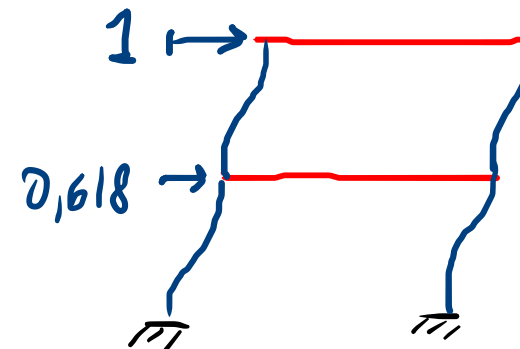
NORMALIZZ. $|U^{(i)}| = 1$, $\max |U_j^{(i)}| = 1$

$$U^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.618 \\ 1 \end{bmatrix}; U^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.618 \end{bmatrix}$$

I MODI DI VIBRAZIONE

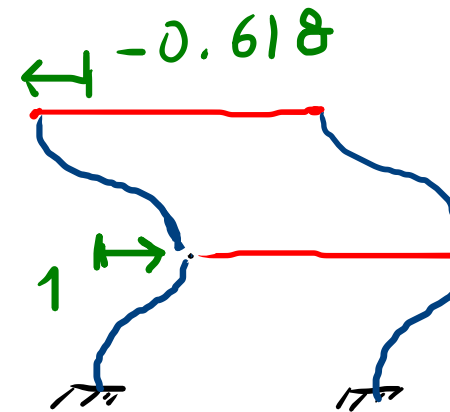
II MODI DI VIBRAZIONE

$U^{(1)}$:



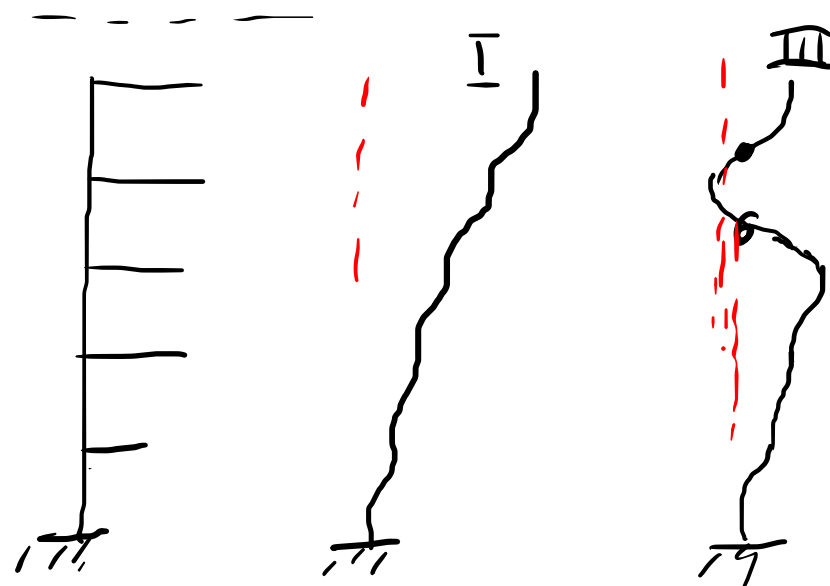
0 nodi

$U^{(2)}$:



1 nodo

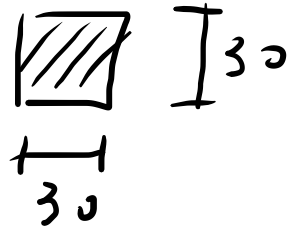
N-1



ES NUMERICO

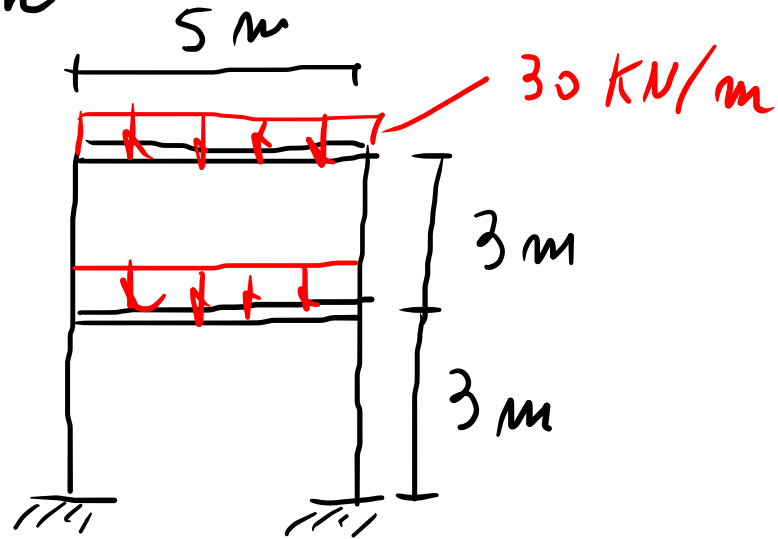
$$E = 20 \text{ GPa} \quad (\text{CLS})$$

$$I = \frac{30^4}{12} = 67500 \text{ cm}^4$$



$$h = 3 \text{ m}$$

m?



$$m = 30 \cdot 5 / g \approx \frac{150}{\sim 10} \approx 15 \text{ KN} \frac{\text{s}^2}{\text{m}} \approx 15000 \text{ Kg}$$

$$T_1 \approx 0,36 \text{ s} \quad \text{PERIODO FONDAMENTALE}$$

$$T_2 \approx 0,14 \text{ s}$$

METODO APPROSS. PER IL CALCOLO DEL
PERIODO FUNDAM.

$$T \approx 0,075 \quad H^{3/4} \approx 0,29 \text{ s}.$$

SISTEMI A (N) G.D.L. - OSCILLAZ. LIBERE NON SMORZATE

$$\begin{cases} \underline{\underline{M}} \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}} \underline{q} = \underline{0} \\ \underline{q}(0) = \underline{q}_0 \\ \dot{\underline{q}}(0) = \dot{\underline{q}}_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \underline{q}(t): \text{vettore dei qdl} \\ \underline{\underline{M}}: \text{m delle masse (di solito } \bar{e} \text{ diagonale)} \\ \text{C. INIZIALI, } 2N \quad (2N \text{ costanti da fissare nel pr. del moto)} \end{array} \quad \underline{\underline{K}}: \text{m di RIGIDITÀ}$$

Ampl. $\underline{q} = \underline{\phi} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$; $\ddot{\underline{q}} = -\omega^2 \underline{\phi} (A \cos \omega t + B \sin \omega t)$

↑ VETTORI DELLE AMPIEZZE (IN UNITÀ)

$$-\underline{\underline{M}} \underline{\phi} \omega^2 (\text{*)} + \underline{\underline{K}} \underline{\phi} (\text{**}) = \underline{0} \quad ; \quad (\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}) \underline{\phi} = \underline{0}$$

SIST. OMogeneo
CHE RICHIEDE CHE IL

det () SIA

NULLO PER AVERE SOLUZ.
DIVERSE DALLA OVVIA ($\underline{\phi} = \underline{0}$)

EQ. CARATTERISTICA

$$\det [\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}] = 0 \Rightarrow \alpha_N (\omega^2)^N + \alpha_{N-1} (\omega^2)^{N-1} + \dots + \alpha_0 = 0$$

PROBL. AUT. GENERALIZZ.

$\Rightarrow$ EQ. CARST. $\Rightarrow (\omega^2)_1, (\omega^2)_2, \dots, (\omega^2)_N$; AUTOV. DEL PROBLEMA

ORDINO LE SOLUT. $0 < \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq \dots \leq \omega_N$
 $\uparrow$ PULS. FONDAMENTALE DEL SIST.

$$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$$

$$T_1 \geq T_2 \geq T_3 \dots \geq T_N \geq 0$$

$\uparrow$
PERIODO
FONDAMENT.

AUTOV. $\omega_i \Rightarrow \underline{\phi}^{(i)}$; MODO DI VIBRARE i -SIMO (OPPORTUNAM. NORMALIZZATO)

$$\max |\phi_j^{(i)}| = 1$$

COME RAPP. IL MOTO $\underline{q}(t)$?

$$\underline{q}(t) = \sum_{n=1}^N \underline{\phi}^{(n)} [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t]$$

$$|\underline{\phi}^{(i)}| = 1 \dots)$$

$\Rightarrow 2N$ costanti incognite (da fissare con le condiz. INIZIALI)

ANALISI MODALE: STUDIO DEL SISTEMA DISCRETO ATTRAVERSO I MODI DI VIBRARE.

INTRODUCO LA MATRICE MODALE $\underline{\Phi}$: LE COLONNE SONO I MODI DI VIBRARE

$$\underline{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(1)} & \dots & \phi_1^{(N)} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_N^{(1)} & \dots & \phi_N^{(N)} \end{bmatrix} \quad N \times N$$

$\underline{\phi}^{(1)} \qquad \qquad \underline{\phi}^{(N)}$

MATRICE SPETTRALE

$$\underline{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad \text{DIAGONALE}$$

$N \times N$