Lezione 28 settembre 2021

martedì 28 settembre 2021 11:15

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE TRA MATRICI

Cons. prima il caso

$$A = (a_{11} \ a_{12} \cdots a_{1n}) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$$

DEF.: $A \cdot B := a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} b_{n1} \in \mathbb{K}$

Ora diamo la def. in generale:

Def.: $A \in M_{m,\textcircled{n}}(\mathbb{K})$, $B \in M_{\textcircled{n},p}(\mathbb{K})$

il PROD. RIGHE PER COLONNE è una matrice $A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{K})$ di tipo $m \times p$ il cui coefficiente di posto i,j è dato da:

$$(A \cdot B)_{ij} := \underset{\substack{\downarrow \\ \text{riga } i \text{ di } A \\ 1 \times n}}{A_{(i)}} \cdot B^{(j)} \rightsquigarrow \underset{n \times 1}{\text{colonna } j\text{-esima di } B}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}$$

$$A_{(i)} = (a_{i1} \ a_{i2} \cdots a_{in}), \quad B^{(j)} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

Esempi: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R})$$

$$\underbrace{\underset{\textcircled{2}\times\textcircled{3}}{A} \cdot \underset{\textcircled{3}\times\textcircled{2}}{B}}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 7 & \underset{1}{0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1} \end{pmatrix}}$$

$$(A \cdot B)_{11} = A_{(1)} \cdot B^{(1)}$$

$$(A \cdot B)_{12} = A_{(1)} \cdot B^{(2)}$$

$$(A \cdot B)_{21} = A_{(2)} \cdot B^{(1)}, \quad (A \cdot B)_{22} = A_{(2)} \cdot B^{(2)}$$

Posso cons. anche $\underbrace{\underset{3\times\textcircled{2}}{B} \cdot \underset{\textcircled{2}\times 3}{A}}_{3 \times 3}$

$$B\cdot A = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\overset{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 2 & 6 & 5\\ -3 & -4 & -10\end{pmatrix}}$$

Vediamo che $A\cdot B$ e $B\cdot A$ possono essere matrici di tipo diverso.

Se però consideriamo matrici quadrate dello stesso ordine n, cioè $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, il loro prodotto è ancora una matrice quadrata di ordine n:

$$A\cdot B \in M_n(\mathbb{K})$$

OSS.: $A, B \in M_n(\mathbb{K})$

possiamo cons. se $\underbrace{\underset{n\times n}{A}\cdot \underset{n\times n}{B}}_{n\times n} \underset{NO}{\overset{?}{\doteq}} \underbrace{\underset{n\times n}{B}\cdot \underset{n\times n}{A}}_{n\times n}$

$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$A\cdot B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\overset{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$, $A\cdot B = \underline{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$

$B\cdot A = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\overset{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{\underline{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}}$

PROP.: In generale, il prodotto righe per colonne non è commutativo.

Vediamo ora le proprietà di $\cdot$ rispetto alla $+$ e alla molt. per scalari:

Teorema:

① $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $C, D \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $c \in \mathbb{K}$. Allora valgono:

$$\underbrace{\underbrace{(A+B)}_{m\times n}\cdot \underset{n\times p}{C}}_{m\times p} = \underbrace{\underbrace{A\cdot C}_{m\times p} + \underbrace{B\cdot C}_{m\times p}}_{m\times p}$$

$$A\cdot(C+D) = A\cdot C + A\cdot D$$

$$A\cdot(c\cdot C) = c\cdot(A\cdot C) = (c\cdot A)\cdot C$$

$$\underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{n\times n}{I_n}}_{m\times n} = A = \underbrace{\underset{m\times m}{I_m}\cdot\underset{m\times n}{A}}_{m\times n}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&-1\end{pmatrix}$

2×3

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot I_3 = \begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&-1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

$$I_2\cdot A = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&-1\end{pmatrix}$$

Dim.: Vediamo solo la dim.:

$$\underset{m\times n}{A}\cdot I_n = A$$

$$(A\cdot I_n)_{ij} = A_{(i)}\cdot I_n^{(j)}$$

$$= (a_{i1}\ a_{i2}\cdots a_{in})\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\longrightarrow \text{posto } j$$

$$= a_{i1}\cdot 0 + a_{i2}\cdot 0 + \cdots + a_{ij}\cdot 1 + a_{i\,j+1}\cdot 0 + \cdots + a_{in}\cdot 0$$

$$= a_{ij}$$

$$\Rightarrow A\cdot I_n = A$$

Poi: $I_m\cdot A$ analogo

$$(I_m\cdot A)_{ij} = (I_m)_{(i)}\cdot A^{(j)}$$

$$= (0\cdots 0\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{posizione } i}}{1}\cdots 0)\cdot\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$$

$$= a_{ij}$$

Proposizione: Siano $A\in M_{m,n}(K)$, $B\in M_{n,p}(K)$, $C\in M_{p,q}(K)$

Allora: $\underbrace{\underbrace{(A\cdot B)}_{m\times p}\cdot \underset{p\times q}{C}}_{m\times q} = \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underbrace{(B\cdot C)}_{n\times q}}_{m\times q}$

Proposizione: $A\in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B\in M_{n,p}(\mathbb{K})$

${}^tA\in M_{n,m}(\mathbb{K})$ ${}^tB\in M_{p,n}(\mathbb{K})$

Allora

$$\boxed{{}^t(\underbrace{A\cdot B}_{m\times p}) = \underbrace{{}^tB\cdot{}^tA}_{p\times m}}$$

Dim.: $({}^t(A\cdot B))_{ij} = (A\cdot B)_{ji} = A_{(j)}\cdot B^{(i)} = a_{j1}\cdot b_{1i} + a_{j2}\cdot b_{2i}+\dots+a_{jn}\cdot b_{ni}$

$$({}^tB\cdot{}^tA)_{ij} = ({}^tB)_{(i)}\cdot({}^tA)^{(j)} = (b_{1i}\ \ b_{2i}\ \cdots\ b_{ni})\cdot\begin{pmatrix}a_{j1}\\a_{j2}\\\vdots\\a_{jn}\end{pmatrix} = b_{1i}\cdot a_{j1} + b_{2i}\,a_{j2}+\dots+b_{ni}\cdot a_{jn}$$

$a_{j1}\cdot b_{1i} = b_{1i}\cdot a_{j1}$ sono uguali, perchè • in $\mathbb{K}$ è commutativo

MATRICI INVERTIBILI

Def. Sia $A\in M_n(\mathbb{K})$. A si dice INVERTIBILE se $\exists\ M\in M_n(\mathbb{K})$ t.c.

$$\boxed{A\cdot M = \mathbb{I}_n = M\cdot A} \quad ⊛$$

OSS.: Diversamente dai campi, non sempre matrici non nulle sono invertibili.

Es.: $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

Vediamo se $\exists\ M$ t.c. ⊛

$M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $\underbrace{A\cdot M} = \mathbb{I}_2$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}a+c&b+d\\a+c&b+d\end{pmatrix}\end{array} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ a+c=0 \\ b+d=1 \end{cases}$$

è un sistema lineare nelle incognite a, b, c, d

e non ammette soluzioni,

cioè è INCOMPATIBILE.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 3c & 3d \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ 2b = 0 \\ 3c = 0 \\ 3d = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a = 1/2 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = 1/3 \end{cases}$$

ammette 1 soluzione

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invece $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$