Lezione 26 ottobre 2021

martedì 26 ottobre 2021 10:34

PROP.: Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia $\tilde{A}$ ottenuta da A tramite OE. Allora si ha:

① $rg\, A = rg\, \tilde{A}$

② se $\tilde{A}$ è a scala, allora

$$rg\, \tilde{A} = r = \#\text{ righe non nulle}$$

inoltre: r colonne LIN. INDIP. di $\tilde{A}$ sono quelle relative ai PIVOT.

Inoltre:

r colonne LIN. INDIP. di A sono $A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$ dove j_i sono le colonne dei PIVOT di $\tilde{A}$.

③ $rg\, {}^t A = rg\, {}^t \tilde{A}$

DIM. ①

Abbiamo bisogno di:

TEOREMA DI DIMENSIONE:

$A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e cons. il SLO

$$A \cdot X = 0$$

Sia W il SSV di $\mathbb{K}^n$ costituito dalle soluzioni di SLO.

Allora $\boxed{\dim W = n - rg\, A.}$

La dimostrazione si vedrà con APPLIC. LINEARI.

Torniamo alla dim. di ①.

Sappiamo che se $\tilde{A}$ è ottenuta con OE, i sistemi $A \cdot X = 0$ e $\tilde{A} \cdot X = 0$ sono equivalenti, cioè se W è ins. delle soluz. di $A \cdot X = 0$ e $\tilde{W}$ è il SSV delle soluzioni di $\tilde{A} \cdot X = 0$, allora

$$W = \tilde{W}.$$

Applico il Teorema di Dimensione

$$\dim W = n - rg\, A, \quad rg\, A = n - \dim W$$

$$\dim \tilde{W} = n - rg\, \tilde{A}, \quad rg\, \tilde{A} = n - \dim \tilde{W}$$

$$rg\, A = n - \dim W = n - \dim \tilde{W} = rg\, \tilde{A}.$$

② Supp. $\tilde{A}$ a scala; voglio dim. che

$$rg\, \tilde{A} = r = \#\text{ righe non nulle.}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{1j_1} & * & \cdots & & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \tilde{a}_{2j_2} & * \cdots & * \\ & & & 0 & \cdots & & \tilde{a}_{rj_r} & * \\ & & & \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & \\ 0 & \cdots & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$rg\, \tilde{A} = \dim \operatorname{Span}(\text{colonne di } \tilde{A})$

$\operatorname{Span}(\text{colonne } \tilde{A}) \subseteq \mathbb{K}^m$

osservo che le colonne hanno tutte le componenti da $r+1$ a m nulle; quindi possiamo scrivere

$$\tilde{A}^{(j_1)} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1j_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{a}_{1j_1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{a}_{1j_1} \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_r$$

$$\tilde{A}^{(j_1+1)} = \tilde{a}_{1\,j_1+1} \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \dots + 0 \cdot e_r$$

$\vdots$

$$\tilde{A}^{(j_2)} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1j_2} \\ \tilde{a}_{2j_2} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{a}_{1j_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{a}_{2j_2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \tilde{a}_{1j_2} \cdot e_1 + \tilde{a}_{2j_2} \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \dots + 0 \cdot e_r$$

$\vdots$

$$\tilde{A}^{(j_2+1)} = \tilde{a}_{1\,j_2+1} \cdot e_1 + \tilde{a}_{2\,j_2+1} \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + \dots + 0 \cdot e_r$$

$\vdots$

$$\tilde{A}^{(j_3)} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1j_3} \\ \tilde{a}_{2j_3} \\ \tilde{a}_{3j_3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{a}_{1j_3} \cdot e_1 + \tilde{a}_{2j_3} \cdot e_2 + \tilde{a}_{3j_3} \cdot e_3 + 0 \cdot e_4 + \dots + 0 \cdot e_r$$

$\vdots$

$$\tilde{A}^{(j_r)} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{1j_r} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{rj_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \tilde{a}_{1j_r} \cdot e_1 + \dots + \tilde{a}_{rj_r} \cdot e_r$$

$$\Rightarrow \operatorname{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(n)}) \subseteq \operatorname{Span}(e_1, \dots, e_r)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim \operatorname{Span}(\tilde{A}^{(1)}, \dots, \tilde{A}^{(n)})}_{= rg\, \tilde{A}} \le \underbrace{\dim \operatorname{Span}(e_1, \dots, e_r)}_{= r}$$

perché $e_1, \dots, e_r$ sono LIN. INDIP. e generatori

$$rg\, \tilde{A} \le r$$

Per mostrare che vale $rg\, \tilde{A} \ge r$, basta esibire r colonne di $\tilde{A}$ che siano LIN. INDIP.

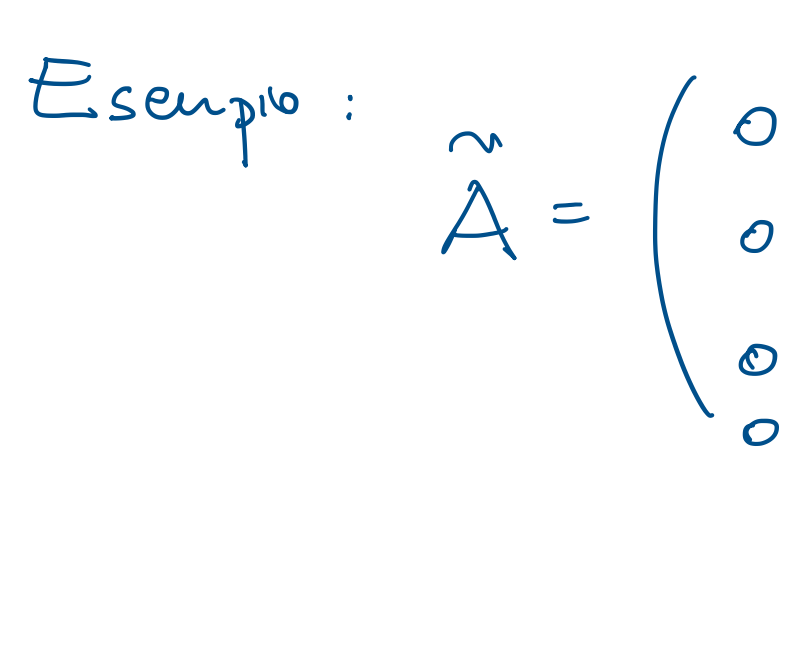
Affermo che $\tilde{A}^{(j_1)}, \dots, \tilde{A}^{(j_r)}$ sono LIN. INDIP. (le colonne relative ai PIVOT)

$$c_1 \tilde{A}^{(j_1)} + c_2 \tilde{A}^{(j_2)} + \dots + c_r \cdot \tilde{A}^{(j_r)} = 0 \in \mathbb{K}^m$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \cdot \tilde{a}_{1j_1} + c_2 \tilde{a}_{1j_2} + \dots + c_r \tilde{a}_{1j_r} \\ c_2 \cdot \tilde{a}_{2j_2} + \dots + c_r \tilde{a}_{2j_r} \\ c_3 \cdot \tilde{a}_{3j_3} + \dots + c_r a_{3j_r} \\ c_{r-1} \tilde{a}_{r-1\,j_{r-1}} + \overset{=0}{c_r} \cdot * \\ c_r \tilde{a}_{rj_r} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\ne 0$ perché PIVOT $\Rightarrow c_{r-1} = 0$

$\ne 0$ perché è PIVOT $\Rightarrow c_r = 0$



Abbiamo $c_r = 0$, $c_{r-1} = 0$, $\dots$, $c_1 = 0$

$\Rightarrow$ sono LIN. INDIP.

$\Rightarrow$ abbiamo $rg\, \tilde{A} = r$, e le colonne dei PIVOT sono LIN. INDIP.

Esempio:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{2} & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A}^{(2)} \quad \tilde{A}^{(4)} \quad \tilde{A}^{(5)}$$

$$c_1 \cdot \tilde{A}^{(2)} + c_2 \cdot \tilde{A}^{(4)} + c_3 \cdot \tilde{A}^{(5)} = 0$$

$$c_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^4$$

$$\begin{pmatrix} 2c_1 + 5c_2 + 6c_3 \\ c_2 + 2c_3 \\ 3c_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{3} c_3 = 0 \iff c_3 = 0$$

$$c_2 + 2c_3 = 0, \quad c_2 = 0$$

$$2c_1 + 5c_2 + 6c_3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot c_1 = 0, \Rightarrow c_1 = 0$$

Dimostriamo, infine, che anche

$A^{(j_1)}, \dots, A^{(j_r)}$ sono LIN. INDIP.

cons. una loro comb. lineare

$$\boxed{b_1 \cdot A^{(j_1)} + b_2 \cdot A^{(j_2)} + \dots + b_r \cdot A^{(j_r)} = 0}$$

TRUCCO: cons. $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ così definito:

$$s_i := \begin{cases} 0 & \text{se } i \ne j_i \\ b_i & \text{se } i = j_i \end{cases}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ b_2 \\ 0 \\ \vdots \\ b_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j_1\text{-esima componente} \\ \\ \\ \leftarrow j_2\text{-esima componente} \\ \\ \\ \leftarrow j_r\text{-esima componente} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Osservo che

$$A \cdot S : \begin{pmatrix} a_{11} s_1 + a_{12} s_2 + \dots + a_{1n} s_n \\ a_{21} s_1 + a_{22} s_2 + \dots + a_{2n} s_n \\ \vdots \\ a_{m1} s_1 + a_{m2} s_2 + \dots + a_{mn} s_n \end{pmatrix}$$

$$= s_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + s_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= s_1 \cdot A^{(1)} + s_2 \cdot A^{(2)} + \dots + s_n \cdot A^{(n)}$$

$$= 0 \cdot A^{(1)} + 0 \cdot A^{(2)} + \dots + b_1 \cdot A^{(j_1)} + \dots + b_2 A^{(j_2)} + \dots + b_r \cdot A^{(j_r)} + 0 \cdot A^{(j_r+1)} + \dots + 0 \cdot A^{(n)}$$

da questo vedo che $b_1 A^{(j_1)} + \dots + b_r \cdot A^{(j_r)} = 0$

$\iff A \cdot S = 0$, quindi S è soluzione di SLO

$$A \cdot X = 0$$

MA: ricordo che le soluz. di $A \cdot X = 0$ e $\tilde{A} \cdot X = 0$ sono le stesse

$$\iff \tilde{A} \cdot S = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$b_1 \cdot \tilde{A}^{(j_1)} + b_2 \tilde{A}^{(j_2)} + \dots + b_r \tilde{A}^{(j_r)} = 0$$

abbiamo dimostrato che queste sono LIN. INDIP. $\Rightarrow b_1 = b_2 = \dots = b_r = 0$

$\Rightarrow$ anche le $A^{(j_1)}, A^{(j_2)}, \dots, A^{(j_r)}$ sono LIN. INDIP.

OSS. Questo argomento permette di dire che

$$c_1 A^{(k_1)} + c_2 \cdot A^{(k_2)} + \dots + c_\ell A^{(k_\ell)} = 0$$

$$\iff c_1 \cdot \tilde{A}^{(k_1)} + c_2 \cdot \tilde{A}^{(k_2)} + \dots + c_\ell \tilde{A}^{(k_\ell)} = 0$$

③ OMESSA DIMOSTRAZ.

Esempi: cons. Teo. di Dimensione: $A \cdot X = 0$

$$\dim W = n - rg\, A$$

①

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I \leftrightarrow II} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{II \leftrightarrow III} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{II - 4 \cdot I} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$rg\, A = 2$$

$$\dim W = n - rg\, A = 4 - 2 = 2$$

infatti: $A \cdot X = 0$ $\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 + 4x_4 = 0 \end{cases}$

$\tilde{A} \cdot X = 0$ $\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \\ -4x_2 - 4x_4 = 0 \end{cases}$

x_4 incognita libera: poniamo $x_4 = c$ con $c \in \mathbb{R}$ parametro

$$\Rightarrow x_1 = -x_4 = -c$$

dalla prima eq. $x_2 = -x_1 - 2x_4 = c - 2c = -c$

x_3 incognita libera, $x_3 = d$

$$\Rightarrow \text{la gen. soluzione}: \begin{pmatrix} -c \\ -c \\ d \\ c \end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$