Lezione 29 ottobre 2021

venerdì 29 ottobre 2021 11:24

Visto: $\mathrm{rg}\, A$

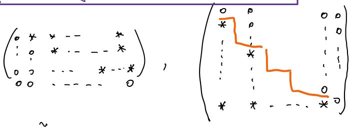
Risultati: $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \tilde{A}$ → Teo. Dimensione

$\mathrm{rg}\, {}^tA = \mathrm{rg}\, {}^t\tilde{A}$ → omesse dim.

Inoltre:

Prop.: Sia $\tilde{A}$ una matrice a scala, allora $\mathrm{rg}\, \tilde{A} = \mathrm{rg}\, {}^t\tilde{A}$.

Dim. (solo cenno)



simile a $\mathrm{rg}\, \tilde{A} = r = \#$ righe non nulle

NON in programma.

COROLLARIO: $\forall A \in M_{m,n}(K)$ vale $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, {}^tA$

Dim.: $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, \tilde{A} = \mathrm{rg}\, {}^t\tilde{A} = \mathrm{rg}\, {}^tA$

COMMENTO: $A \in M_{m,n}(K)$

$\mathrm{Span}\,(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq K^m$

${}^tA \in M_{n,m}(K)$

$\mathrm{Span}\,({}^tA^{(1)}, {}^tA^{(2)}, \dots, {}^tA^{(m)}) \subseteq K^n$

i due sottospazi sono di natura diverse e vivono in spazi DIVERSI.

Il Corollario ci dice che i 2 SSV hanno SEMPRE la stessa dimensione.

$$= \underbrace{\mathrm{Span}\left(A_{(1)}, A_{(2)}, \dots, A_{(m)}\right)}_{\text{sottosp. vett. generato dalle righe di } A}$$

ALCUNI TESTI: $\dim \mathrm{Span}\left(A_{(1)}, \dots, A_{(m)}\right)$ il **RANGO PER RIGHE** di A

invece: $\dim \mathrm{Span}\left(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right)$ viene chiamato **RANGO PER COLONNE** di A

~ · ~ · ~ · ~

Vogliamo ora dare un criterio affinché un SL sia compatibile (senza passare attraverso $\tilde{A}$).

Prima ci serve:

LEMMA: Un SL $A \cdot X = b$ è compatibile $\Longleftrightarrow$ $b \in \mathrm{Span}\left(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right)$.

DIM.: Supp. $A \cdot X = b$ compatibile, $\exists\, s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$

$$A \cdot s = b \qquad \begin{cases} a_{11} s_1 + a_{12} s_2 + \dots + a_{1n} s_n = b_1 \\ a_{21} s_1 + a_{22} s_2 + \dots + a_{2n} s_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} s_1 + a_{m2} s_2 + \dots + a_{mn} s_n = b_m \end{cases}$$

$A^{(1)} \cdot s_1$

$$\Longleftrightarrow \quad A^{(1)} \cdot s_1 + A^{(2)} \cdot s_2 + \dots + A^{(n)} \cdot s_n = b$$

$\rightarrow$ b è comb. lineare delle colonne di A

$\Rightarrow$ $b \in \mathrm{Span}\left(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right)$

Viceversa: supp. $b \in \mathrm{Span}\left(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}\right)$

quindi $\exists$ dei coeff. $c_1, c_2, \dots, c_n$ t.c.

$$b = c_1 \cdot A^{(1)} + c_2 \cdot A^{(2)} + \dots + c_n \cdot A^{(n)}$$

ovvero:

$$A^{(1)} \cdot c_1 + A^{(2)} \cdot c_2 + \dots + A^{(n)} \cdot c_n = b$$

$$\iff A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = b$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ è una soluzione del SL

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI :

Un SL $A \cdot X = b$ è compatibile $\iff$

$\text{rg}\, A = \text{rg}\,(A|b)$.

Inoltre: se è compatibile, la generica soluzione dipende da $n - \text{rg}\, A$ parametri.

(in alcuni libri: il SL ha $\infty^{n-\text{rg}\, A}$ soluzioni)

Dim.: $A \cdot X = b$ è compatibile $\iff$

$b \in \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$.

Supp. $A \cdot X = b$ compatibile $\Rightarrow$

$$\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\dim \text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})}_{= \text{rg}\, A} = \underbrace{\dim(\text{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b))}_{= \text{rg}\,(A|b)}$$

Viceversa: supp. $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, (A|b)$

$$\Rightarrow \dim \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \dim \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$

inoltre: si ha sempre

$$\mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$

hanno la stessa dimensione $\Rightarrow$ sono uguali

$$\rightarrow \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) = \mathrm{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b)$$

$\Rightarrow$ b è combinazione lineare di $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$

$\Rightarrow$ il SL è compatibile per il Lemma.

Infine: Supp. $A \cdot X = b$ compatibile.

Per il Teorema di Struttura delle soluzioni di SL ogni soluzione si scrive nella forma

$s = \check{s} + s_0$, dove $\tilde{s}$ è sol. particolare di $A \cdot X = b$

e s_0 è una soluzione di $A \cdot X = 0$: $s_0 \in W$

Teorema di Dimensione : $\dim W = n - \mathrm{rg}\, A$

per W fisso base $\{w_1, \dots, w_{n-r}\}$

con $r = \mathrm{rg}\, A$

$$\Rightarrow s_0 = c_1 w_1 + \dots + c_{n-r} w_{n-r}$$

$$\Rightarrow s = \tilde{s} + c_1 w_1 + \dots + c_{n-r} w_{n-r}$$

al variare dei coeff. $c_1, \dots, c_{n-r} \in \mathbb{K}$

si trovano tutte le soluzioni di $A \cdot X = b$.

∼ · ∼ · ∼ · ∼ · ∼ · ∼ · ∼

RANGO e INVERTIBILITÀ DI MATRICI QUADRATE

Prop. $A \in M_n(\mathbb{K})$; se A è invertibile

$\Longrightarrow \operatorname{rg} A = n$ il rango è massimo.

Dim.: A invertibile $\Rightarrow \exists\, M \in M_n(\mathbb{K})$ t.c.

$\underbrace{A \cdot M = \mathbb{I}_n}$ e $M \cdot A = \mathbb{I}_n$

$$(A \cdot M)_{ij} = A_{(i)} \cdot M^{(j)} = \delta_{ij}$$

in part. la colonna j di $\mathbb{I}_n$

$$\begin{array}{cc} 1j & \multirow{4}{*}{} \\ 2j & \\ & \\ nj & \end{array} \begin{pmatrix} A_{(1)} \cdot M^{(j)} \\ A_{(2)} \cdot M^{(j)} \\ \vdots \\ A_{(n)} \cdot M^{(j)} \end{pmatrix} = \mathbb{I}_n^{(j)}$$

$$= \underbrace{\underbrace{A}_{n \times n} \cdot \underbrace{M^{(j)}}_{n \times 1}}_{n \times 1} = \mathbb{I}_n^{(j)} = e_j$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix} = e_j$$

$$\mathbb{I}_n = \begin{array}{cccc} \left(\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right) \\ e_1 & e_2 & e_j & e_n \end{array}$$

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} m_{1j} \\ m_{2j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}$ è soluzione di $A \cdot x = e_j$
cioè $A \cdot x = e_j$ è compatibile $\forall j$

$\Longrightarrow$ per il Lemma di prima, $\forall\ j = 1, \dots, n$

si ha $e_j \in \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})$

$$\Longrightarrow \underbrace{\operatorname{Span}(e_1, e_2, \dots, e_n)}_{= \mathbb{K}^n} \subseteq \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \subseteq \mathbb{K}^n$$

$$\Longrightarrow \underbrace{\dim \operatorname{Span}(A^{(1)}, \dots, A^{(n)})}_{= \operatorname{rg} A} = n$$

In particolare: se $\operatorname{rg} A \leq n-1 \Longrightarrow A$ non è invertibile.

Esempio settembrino: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ non è invertibile

infatti: $\operatorname{rg} A = 1$, non è massimo $(n=2)$

$\Longrightarrow A$ non è invertibile

Vedremo: che vale anche $\text{rg}\, A = n \Longrightarrow A$ invertibile (con applicazioni lineari).

$d_{11} = 0$

Esempio: $$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$ matrice diagonale

abbiamo visto: D è invertibile $\Longleftrightarrow d_{11} \cdot d_{22} \cdots d_{nn} \neq 0$

Infatti: se $d_{jj} = 0$,

la colonna $D^{(j)}$ è nulla $\Longrightarrow \text{rg}\, D \leq n-1$

Esempio:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\text{rg}\, A = 2$

è invertibile $\quad M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix} = \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

basta vedere che $A \cdot X = e_1$ compatib.

$\text{rg}\, A = 2$ $\qquad A \cdot X = e_2$ compatib.

$$\text{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{array}\right) = 2 \qquad \text{rg} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}\right) = 2$$

$\Longrightarrow$ per Teo. di Rouché-Capelli, i 2 SL sono compatibili $\Longrightarrow A$ è invertibile.