Lezione 4 novembre 2021

giovedì 4 novembre 2021 11:15

Visto: Teorema di Rouché - Capelli

Teo.: $A \cdot X = b$ è compatibile $\iff rg\, A = rg\,(A|b)$

Inoltre: in questo, le gen. sol. dipende da $n-r$ parametri, dove $n = \#$ incognite e $r = rg\, A$.

oss. Il Teorema di Cramer è un caso particolare di Rouché - Capelli; infatti:

Teo. Cramer $A \cdot x = b$, A quadrata $n \times n$ e A invertibile

$\Rightarrow \exists!$ soluzione $s = A^{-1} \cdot b$

Secondo Rouché - Capelli: cons. $A \cdot x = b$ con A invertibile

Ricordo che A invertibile $\Rightarrow rg\, A = n$

$rg\,(A|b) \le n$, ma le prime n colonne di $\underbrace{(A|b)}_{n \times n+1}$ di $(A|b)$ generano tutto K^n

$\Rightarrow$ anche $Span(A^{(1)}, \dots, A^{(n)}, b) = K^n$

$\Rightarrow rg\, A = rg\,(A|b) = n$

$\overset{RC}{\Rightarrow}$ il SL è compatibile e la gen. soluzione dipende da

$n - r = n - n = 0$ parametri, cioè c'è un'unica soluzione (non ci sono parametri liberi).

~ ~ . ~ . ~ . ~

USO DEI SL e RANGO PER CALCOLARE LA MATRICE INVERSA

Sup. $A \in M_n(K)$ invertibile ($\Rightarrow rg\, A = n$) vogliamo determinare l'inversa.

$$A \cdot M = \mathbb{I}_n \iff \begin{cases} A \cdot M^{(1)} = \mathbb{I}_n^{(1)} \\ A \cdot M^{(2)} = \mathbb{I}_n^{(2)} \\ \vdots \\ A \cdot M^{(n)} = \mathbb{I}_n^{(n)} \end{cases}$$

come già osservato

$$\mathbb{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

ovvero:

$$\begin{cases} A \cdot M^{(1)} = e_1 \\ A \cdot M^{(2)} = e_2 \\ \vdots \\ A \cdot M^{(n)} = e_n \end{cases}$$

$\iff$

$M^{(1)}$ è soluz. di $A \cdot X = e_1$

$M^{(2)}$ è soluz. di $A \cdot X = e_2$

$\vdots$

$M^{(n)}$ è soluzione di $A \cdot X = e_n$

Quindi: trovare M equivale a risolvere n sistemi lineari; osservo che la matrice dei coefficienti è sempre la stessa, A, cambia solo il vettore dei termini noti.

Cons. $A \cdot X = e_1$, il primo SL

metto la matrice $(A | e_1)$ e scala

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & \cdots & & & * \\ 0 & * & \cdots & & * \\ \vdots & & * & \cdots & * \\ 0 & & & * & * \end{array}\right)$$

osservo che siccome $rg\, A = n = rg\, \tilde{A} = \#$ righe non nulle

i PIVOT di $\tilde{A}$ si trovano sulla diagonale

$\Rightarrow$ con opportune OE, possiamo trasformare $\tilde{A}$ nella $\mathbb{I}_n$.

Infatti:

$$(\tilde{A} | \tilde{b}_1) = \left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{11} & \cdots & & & * \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & & \vdots \\ 0 & \cdots 0 & \tilde{a}_{n-1\,n-1} & \tilde{a}_{n-1\,n} & \\ 0 & \cdots & 0 & \boxed{\tilde{a}_{nn}} & * \end{array}\right) \quad \tilde{a}_{nn} \neq 0$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{\tilde{a}_{nn}} \cdot (\tilde{A}|\tilde{b}_1)_{(n)}} \left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{11} & \cdots & & * & * \\ 0 & \tilde{a}_{22} & & \vdots & \\ & & \tilde{a}_{n-1\,n-1} & \tilde{a}_{n-1\,n} & \\ 0 & \cdots & & 1 & * \end{array}\right)$$

(OE2)

$\xrightarrow{\text{Riga}(n-1) - \tilde{a}_{n-1\,n} \cdot \text{Riga}(n)}$

e $\text{Riga}(n-1) \leftrightarrow \frac{1}{\tilde{a}_{n-1\,n-1}} \text{Riga}(n-1)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{11} & \cdots & & * & * \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \cdots & * & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & * \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

procedendo a ritroso, con OE trasformo $\tilde{A}$ nella matrice $\mathbb{I}_n$

$\rightsquigarrow (\mathbb{I}_n | b_1)$ e il SL associato è equivalente a $A \cdot X = e_1$

le nuove equazioni $\mathbb{I}_n \cdot X = b_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = b_{11} \\ x_2 = b_{21} \\ \vdots \\ x_n = b_{n1} \end{cases} \iff \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$ è l'unica soluzione di $\mathbb{I}_n \cdot X = b_1$,

e quindi anche di $A \cdot X = e_1$

$\Rightarrow b_1 = M^{(1)}$

Rifaccio il procedimento per gli altri SL:

$A \cdot X = e_2 \rightsquigarrow \mathbb{I}_n \cdot X = b_2$, $b_2 = M^{(2)}$

$\vdots$

$A \cdot X = e_n \rightsquigarrow \mathbb{I}_n \cdot X = b_n$, $b_n = M^{(n)}$

In definitiva, per risolvere gli n SL, possiamo fare così:

cons. $(A | e_1\ e_2\ e_3 \cdots e_n)$

$$= \underbrace{(A | \mathbb{I}_n)}_{\text{matrice } n \times 2n} \xrightarrow{OE} (\mathbb{I}_n | \underset{=A^{-1}}{M})$$

con OE trasformo A in $\mathbb{I}_n$

le stesse operazioni vengono effettuate su $\mathbb{I}_n$; al termine della procedura, la matrice a destra diventa M, quindi A^{-1}.

Esempi:

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$(A | \mathbb{I}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2×4

$$\xrightarrow{II - 3 \cdot I} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2} \cdot II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I - 2 \cdot II} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

$= \mathbb{I}_2$ $\quad = A^{-1}$

verifica

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \overset{\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

②

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{II - I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III - II} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I - III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$\mathbb{I}_3$ $\quad = A^{-1}$

③

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

vedremo che è la matrice della rotazione di 45° ($\pi/4$) nello spazio, attorno all'asse y

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{III - I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \underbrace{-2/\sqrt{2}}_{-\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 1/\sqrt{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{I - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot III} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}} & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2} \cdot I} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$= \mathbb{I}_3$ $\quad A^{-1}$

oss. che $A^{-1} = A$

~ . ~ . ~ . ~ . ~

PUNTO DELLA SITUAZIONE:

- Spazi vettoriali ← · basi e dimensione ⟷ · dim di un sottospazio affine · equazioni parametriche
  - · SSV
- matrici ↖ · SL
  - · rg ⟷ equazioni cartesiane

Geometria affine sottospazi affini

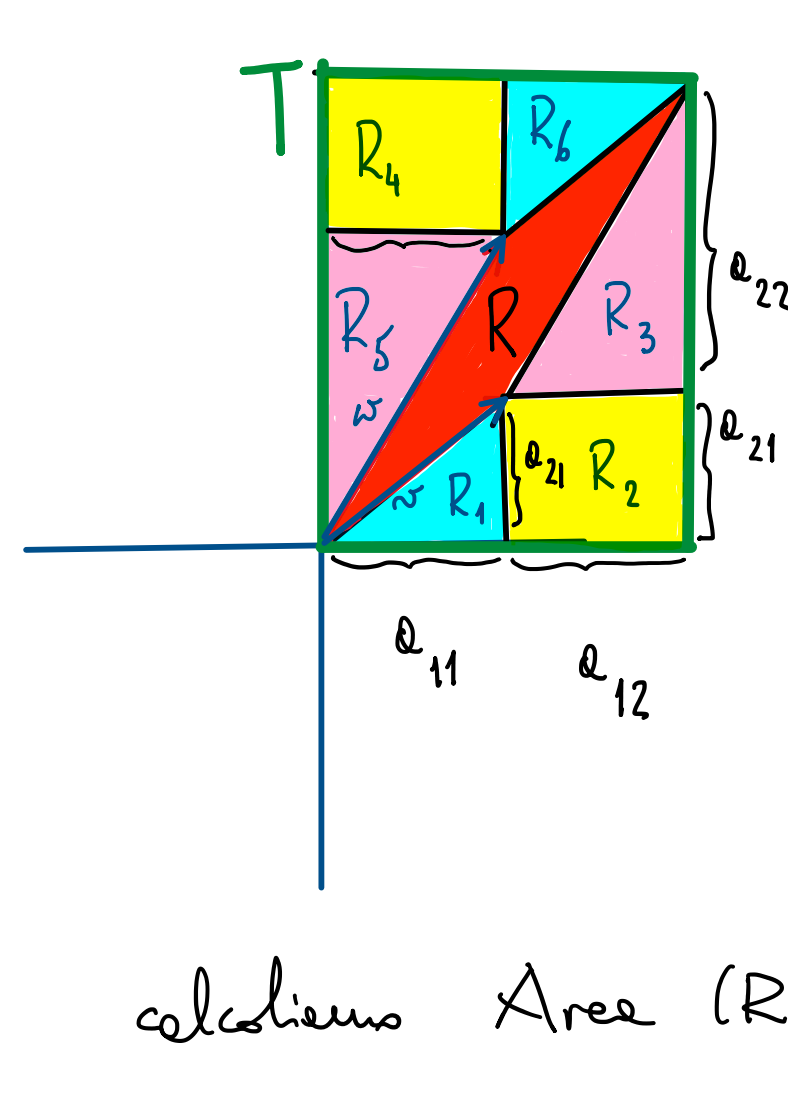
MANCA: la nozione di DETERMINANTE

Vediamo un caso particolare e interpret. geometrica:

> **DEF.:** Sia $A \in M_2(K)$
>
> $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$
>
> il DETERMINANTE di A:
>
> $\det A := a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \in K$

Significato geometrico: $a_{ij} \in \mathbb{R}$

supp. per semplicità $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{12} > 0$, $a_{21} > 0$



$v = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$

$w = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

calcoliamo $\text{Area}(R) = \text{Area}\, T - \sum_{i=1}^{6} \text{Area}(R_i)$

oss. $\text{Area}\, R_1 = \text{Area}\, R_6 = \frac{a_{11} \cdot a_{21}}{2}$

$\text{Area}\, R_2 = \text{Area}\, R_4 = a_{12} \cdot a_{21}$

$\text{Area}\, R_3 = \text{Area}\, R_5 = a_{12} \cdot a_{22}/2$

$\text{Area}\, T = (a_{11} + a_{12}) \cdot (a_{21} + a_{22})$

$$\text{Area}\, R = a_{11} a_{21} + a_{12} a_{21} + a_{11} a_{22} + a_{12} a_{22} - \left(2 \cdot \frac{a_{11} \cdot a_{21}}{2}\right) - (2 \cdot a_{12} \cdot a_{21}) - \left(2 \cdot \frac{a_{12} \cdot a_{22}}{2}\right)$$

$$= \cancel{a_{11} a_{21}} + a_{12} \cdot a_{21} + a_{11} a_{22} + \cancel{a_{12} a_{22}} - \cancel{a_{11} \cdot a_{21}} - 2 a_{12} \cdot a_{21} - \cancel{a_{12} a_{22}}$$

$$= \boxed{a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}} = \det A$$