Abbiamo quindi constatato che per matrici 2×2, il $\det A = 0 \iff \operatorname{rg} A < 2$

Vedremo che è poss. def. il det per matrici quadrate $n \times n$ e avremo una proprietà simile.

Il det è anche utile per il calcolo di A^{-1}.

Infatti: sia $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

e cons. $B = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \det A & \overbrace{-a_{11}a_{12} + a_{11}a_{12}}^{= 0} \\ \underbrace{a_{21}a_{22} - a_{21}a_{22}}_{= 0} & \det A = \boxed{-a_{21}a_{12} + a_{11}a_{22}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot I_2$$

Se $\det A \neq 0$, $\frac{1}{\det A} A \cdot B = I_2$

cioè : $A \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\det A} B \right)}_{= M} = I_2$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Def. Sia $A \in M_n(K)$, definiamo il suo determinante in modo RICORSIVO:

1. se $A \in M_1(K)$, $A = (a_{11})$,

$$\det A := a_{11}$$

2. se $n > 1$, poniamo

A_{ij} := la sottomatrice di A di tipo $(n-1) \times (n-1)$

ottenuta da A togliendo la riga i e la colonna j ; A_{ij} è chiamata MINORE ij.

$$\det A := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \cdot \det A_{i1} .$$

Esempio: per $n = 2$, troviamo: $A = \begin{pmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$

$A_{11} = a_{22}$, $A_{21} = a_{12}$, $\det A_{11} = a_{22}$

$\det A_{21} = a_{12}$

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \cdot a_{22} + (-1)^{2+1} \cdot a_{21} \cdot a_{12} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{22}$$

Esempio: $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det A = \overset{i=1}{(-1)^{1+1}} \cdot a_{11} \cdot \det A_{11} + \overset{i=2}{(-1)^{2+1}} \cdot a_{21} \cdot \det A_{21} + \overset{i=3}{(-1)^{3+1}} \cdot a_{31} \cdot \det A_{31}$$

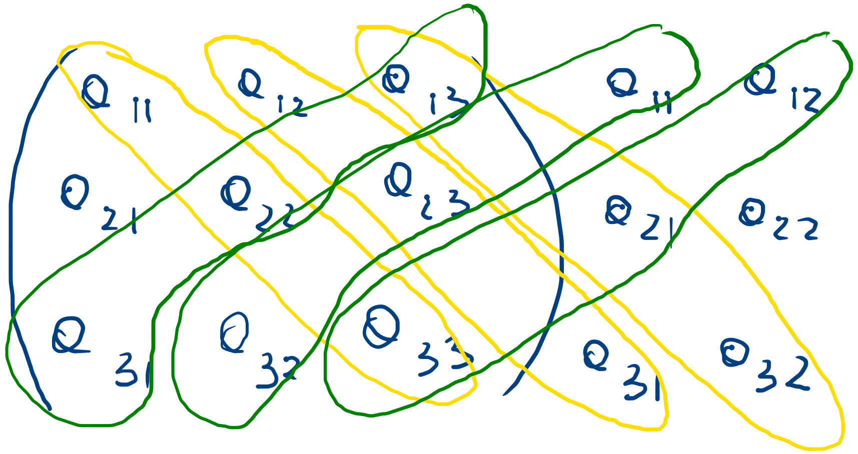
$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31} \cdot (a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13}.$$

REGOLA DI SARRUS (solo $n=3$)



$\det A$ = somma prodotti degli elementi sulle diagonali gialle

− somma prodotti degli el. su verdi

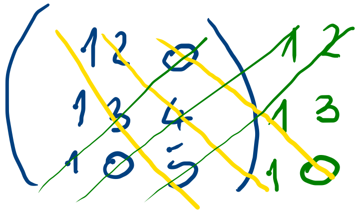
Esempio numerico:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 0$$

$$- 0 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 5$$

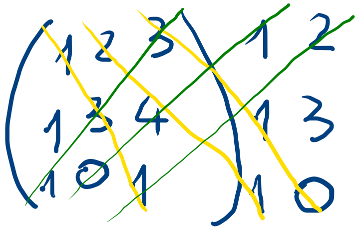
$$= 15 + 8 + 0 - 0 - 0 - 10 = 13$$



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det A = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 0 - 3 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 1$$

$$= 3 + 8 + 0 - 9 - 0 - 2 = 0$$



TEOREMA: Sia $A=(a_{ij}) \in M_n(K)$. Allora valgono le seguenti proprietà algebriche:

(D1) $\forall i=1,\dots,n$, se $A_{(i)}$ è somma di 2 matrici riga $A_{(i)} = R' + R''$, $R' \in M_{1,n}(K)$, $R'' \in M_{1,n}(K)$

allora

$$\det A = \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R' \\ A_{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ \vdots \\ R'' \\ A_{(n)} \end{pmatrix}$$

$(i) \rightarrow$ (riga di R') ; (i) (riga di R'')

(il det. è additivo sulle righe)

inoltre $\forall c \in \mathbb{K}$, se $A_{(i)} = c \cdot R$, $R \in M_{1,n}(\mathbb{K})$

allora
$$\det A = c \cdot \det \begin{pmatrix} A_{(1)} \\ R \\ A_{(n)} \end{pmatrix} \leftarrow i$$

(il det è OMOGENEO sulle righe)

Per additività e omogeneità diciamo che il det è una FUNZIONE MULTILINEARE delle righe.

D2 Se in A si scambiano 2 righe, allora det cambia segno.

$\boxed{D3}$ $\det I_n = 1$

$\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 1$

$\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}1&0\\0&1\\0&0\end{matrix} = 1$

TEOREMA: $\exists!\ \det : M_n(K) \longrightarrow K$

è l'unica funzione che verifica $\boxed{D1}$, $\boxed{D2}$, $\boxed{D3}$.