Esercizi di Geometria
Ingegneria Industriale e Navale 2021/2022
settimo foglio

November 6, 2021

1. Si determini l'inversa, se esiste, di ognuna delle seguenti matrici.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{Q}),$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

2. Per ogni valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ si calcoli il rango della seguente matrice:

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

   Per ogni $a \in \mathbb{R}$ tale che A_a è invertibile, si calcoli la matrice inversa A_a^{-1} di A_a.

3. Si calcolino i determinanti delle seguenti matrici, usando la regola di Sarrus e poi usando una formula di Laplace a piacere:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 7 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pi & 2 & 0 \\ 0 & -\pi & 1 \\ 2\pi & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2.2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2.3 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Usando la formula dei cofattori si determini l'inversa delle seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Usando la formula di Cramer si risolvino i seguenti sistemi lineari:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 &= 2 \\ x_1 + 3x_2 &= -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - 5x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{cases}$$

6. Usando la formula di Cramer e una calcolatrice si risolva il seguente problema del Page Rank:

$$\begin{cases} x_1 &= 0.85\left(\frac{x_2}{2}\right) + \frac{0.15}{4} \\ x_2 &= 0.85\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2}\right) + \frac{0.15}{4} \\ x_3 &= 0.85\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_4}{2}\right) + \frac{0.15}{4} \\ x_4 &= 0.85\left(\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + x_3\right) + \frac{0.15}{4} \end{cases}$$

7. Si considerino le seguenti coppie di numeri reali:

$$P_0 = (1,1),\ P_1 = (2,1),\ P_2 = (-1,2).$$

Usando un opportuno sistema lineare si dimostri che esiste un unico polinomio $f(x)$ di grado ≤ 2 tale che valgano

$$f(1) = 1,\ f(2) = 1,\ f(-1) = 2.$$

8. In generale, considerando un opportuno sistema lineare e il Teorema di Cramer, si dimostri che date $n+1$ coppie di numeri reali

$$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$$

con $x_i \neq x_j$ per ogni $i \neq j$, esiste un unico polinomio $f(x)$ di grado $\leq n$ tale che si abbia

$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1, \dots,\ f(x_n) = y_n.$$

Questo problema si dice **problema di interpolazione polinomiale**.