

Analisi Matematica II

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda - Parte II

Università di Trieste, CdL Ingegneria, a.a. 2021/2022

1 Equazioni differenziali - prime definizioni

Le equazioni differenziali sono uno degli strumenti principali utilizzati per modellizzare i fenomeni della Natura, nel senso più ampio del termine. Le troviamo in tutte le Scienze, principalmente nella Fisica, ma anche in ambito economico, biologico, medico, sociale. Esse sono catalogabili in due tipi diversi: le equazioni differenziali ordinarie e le equazioni differenziali alle derivate parziali. In queste note, tratteremo solo delle prime.

Consideriamo un'espressione del tipo

$$u' = f(t, u), \quad (1)$$

che chiameremo “equazione differenziale in forma canonica”, e iniziamo a spiegarne il significato. Qui f è una funzione continua definita su un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, a valori in \mathbb{R}^N .

Definizione 1 Diremo che una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è “soluzione di (1) in I ” se:

- I è un intervallo non degenere di \mathbb{R} ,
- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$,
- u è derivabile su I ,
- $u'(t) = f(t, u(t))$ per ogni $t \in I$.

Ricordiamo che

$$u'(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{u(s) - u(t)}{s - t} \in \mathbb{R}^N$$

è il “vettore derivata” di u in t .¹ Spesso, pensando ai modelli della meccanica, $u(t)$ si può interpretare come “vettore posizione al tempo t ” e $u'(t)$ come “vettore velocità al tempo t ”. Si chiama “orbita” della soluzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ l'insieme immagine $u(I) = \{u(t) : t \in I\}$, mentre chiameremo “traiettoria” di u il suo grafico $\{(t, u(t)) : t \in I\}$. Lo spazio \mathbb{R}^N si chiama “spazio delle fasi”.

¹Siano $a = \inf I$ e $b = \sup I$. Se $a \in I$, allora $u'(a)$ sarà un limite destro. Similmente, se $b \in I$, allora $u'(b)$ sarà un limite sinistro.

Nelle applicazioni ci si trova spesso ad affrontare la ricerca di una soluzione dell'equazione differenziale che soddisfi una “condizione iniziale” del tipo

$$u(t_0) = u_0 .$$

Avendo in mente i modelli della meccanica, si dice che la “posizione” di u “al tempo iniziale” t_0 è u_0 . Ci si trova così a dover risolvere il “problema di Cauchy”

$$(PC) \quad \begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

dove $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una funzione continua, e $(t_0, u_0) \in \Omega$.

Definizione 2 Diremo che una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è “soluzione del problema (PC)” se:

- I è un intervallo contenente al suo interno t_0 ,
- u è soluzione di (1) in I ,
- $u(t_0) = u_0$.

Risulta molto utile la seguente formulazione equivalente del problema.

Teorema 3 Una funzione $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ è soluzione del problema (PC) se e solo se:

- I è un intervallo contenente al suo interno t_0 ,
- $(t, u(t)) \in \Omega$ per ogni $t \in I$,
- u è continua su I ,
- $u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds$ per ogni $t \in I$.²

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare una doppia implicazione. Se u è una soluzione del problema (PC), allora

$$u(t) - u(t_0) = \int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds ,$$

il che dimostra una delle due implicazioni.

²L'integrale di una funzione a valori vettoriali $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$, con

$$g(t) = (g_1(t), \dots, g_N(t)) ,$$

è definito da

$$\int_a^b g(t) dt = \left(\int_a^b g_1(t) dt, \dots, \int_a^b g_N(t) dt \right) .$$

Esso è quindi un vettore di \mathbb{R}^N . Se $a < b$, risulterà utile la seguente disuguaglianza:

$$\left\| \int_a^b g(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|g(t)\| dt .$$

Viceversa, se u è una funzione continua per cui si abbia

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds,$$

si ha che $u(t_0) = u_0$, e la funzione $s \mapsto f(s, u(s))$ è continua. Quindi u è derivabile, e si ha

$$u'(t) = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds = f(t, u(t)),$$

per ogni $t \in I$. ■

Spesso le equazioni differenziali coinvolgono anche derivate di ordine più elevato. Un tipico esempio è dato dall'equazione di Newton $F = ma$. In questo caso, se $x(t)$ denota la posizione di un oggetto di massa m al tempo t , l'equazione si può solitamente scrivere come

$$x'' = \frac{1}{m} F(t, x, x').$$

Qui F dipende dal tempo t , dalla posizione x e dalla velocità x' . Definendo $y = x'$, $u = (x, y)$, e $f(t, u) = (y, \frac{1}{m} F(t, x, y))$, l'equazione si può scrivere come

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = \frac{1}{m} F(t, x, y), \end{cases}$$

ossia $u' = f(t, u)$, che ne è la forma canonica (1). Il problema di Cauchy in questo caso avrà una condizione iniziale del tipo $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = y_0$.

In generale, un'equazione differenziale “di ordine n ” si presenta nella forma

$$x^{(n)} = g(t, x, x', \dots, x^{(n-1)}).$$

Essa può essere ricondotta alla forma canonica (1), con $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, ponendo

$$u_1 = x, u_2 = x', \dots, u_n = x^{(n-1)}, \quad f(t, u) = (u_2, u_3, \dots, g(t, u_1, u_2, \dots, u_n)).$$

Il corrispondente problema di Cauchy avrà come condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1}.$$

2 Alcune semplici equazioni

Iniziamo a considerare il caso scalare $N = 1$: in generale, purtroppo, anche in questo caso “semplice”, trovare una soluzione esplicita di un'equazione differenziale può essere un'impresa senza speranza.

Consideriamo dapprima l'equazione differenziale

$$u' = a(t)u + b(t),$$

dove $a, b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni continue. Si parla in questo caso di “equazione differenziale lineare”. Studiamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = a(t)u + b(t) \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Notiamo che, se u è una soluzione, allora

$$\frac{d}{dt} \left[u(t) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} \right] = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} (u'(t) - a(t)u(t)) = e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} b(t);$$

integrando su $[t_0, t]$,

$$u(t) e^{-\int_{t_0}^t a(s) ds} - u_0 = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} b(\sigma) d\sigma,$$

da cui ricaviamo la formula risolutiva

$$u(t) = e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} \left(u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\sigma} a(s) ds} b(\sigma) d\sigma \right).$$

Ad esempio, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3u + t^2 \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

ha come soluzione

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{\int_0^t 3 ds} \int_0^t e^{-\int_0^{\sigma} 3 ds} \sigma^2 d\sigma \\ &= e^{3t} \int_0^t e^{-3\sigma} \sigma^2 d\sigma \\ &= \frac{2}{27} (e^{3t} - 1) - \frac{1}{3} t^2 - \frac{2}{9} t. \end{aligned}$$

Analizziamo ora le “equazioni differenziali a variabili separabili”:

$$u' = e(t)g(u).$$

Qui $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ ha come dominio un intervallo J , ed $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre $g(u) \neq 0$ per ogni u nell'intervallo J , per cui l'equazione si può scrivere l'equazione nella forma equivalente

$$\frac{u'(t)}{g(u(t))} = e(t), \quad u(t) \in J. \quad (2)$$

Come sopra, studiamo il relativo problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = e(t)g(u) \\ u(t_0) = u_0, \end{cases}$$

Supponendo che $u([t_0, t])$ sia contenuto in J si può integrare (2) su $[t_0, t]$ e, con un cambio di variabile, si ottiene

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{g(u)} = \int_{t_0}^t e(s) ds.$$

Se denotiamo con $\mathcal{P} : J \rightarrow \mathbb{R}$ una primitiva di $1/g$, otteniamo

$$\mathcal{P}(u(t)) = \mathcal{P}(u_0) + \int_{t_0}^t e(s) ds,$$

e siccome \mathcal{P} è strettamente monotona (avendo derivata sempre diversa da zero), possiamo scrivere

$$u(t) = \mathcal{P}^{-1}\left(\mathcal{P}(u_0) + \int_{t_0}^t e(s) ds\right).$$

Ad esempio, vediamo come trattare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sin t (u^2 + 1) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{u^2 + 1} = \int_0^t \sin s ds = 1 - \cos t,$$

da cui

$$\arctan u(t) = \arctan u_0 + 1 - \cos t,$$

ossia

$$u(t) = \tan\left(\arctan u_0 + 1 - \cos t\right).$$

Si noti che l'espressione è ben definita se t varia in un intorno di 0, ma potrebbe non esserlo per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Come secondo esempio, cerchiamo una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{1 + 2t}{\cos u} \\ u(0) = \pi. \end{cases}$$

Abbiamo che

$$\int_{\pi}^{u(t)} \cos u du = \int_0^t (1 + 2s) ds = t + t^2,$$

da cui

$$\sin u(t) = t + t^2.$$

Ora bisogna fare attenzione che ci troviamo con $u(t)$ sull'intervallo contenente π dove la funzione \sin è strettamente monotona, cioè in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Definendo $w(t) = u(t) - \pi$, avremo che $w(t) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e

$$\sin w(t) = \sin(u(t) - \pi) = -\sin u(t) = -(t + t^2),$$

per cui $w(t) = \arcsin(-(t + t^2)) = -\arcsin(t + t^2)$, e quindi

$$u(t) = \pi + w(t) = \pi - \arcsin(t + t^2).$$

3 Il problema di Cauchy: esistenza e unicità

3.1 Esistenza locale

Nel 1890, Giuseppe Peano ha dimostrato il seguente risultato di “esistenza locale”.

Teorema 4 (di Peano) *Per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$, esiste un $r_0 > 0$ tale che il problema (PC) ha una soluzione $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$.*

Si noti che la soluzione potrebbe non essere unica. Ad esempio, sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(u) = \begin{cases} 2\sqrt{u} & \text{se } u \geq 0 \\ -2\sqrt{-u} & \text{se } u < 0. \end{cases}$$

(Qui la funzione f non dipende esplicitamente da t . Si ha pertanto a che fare con un’“equazione differenziale autonoma”.) Si vede subito che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

ha la soluzione costante $u(t) = 0$, ma anche la soluzione

$$u(t) = t|t| = \begin{cases} t^2 & \text{se } t \geq 0 \\ -t^2 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Inoltre, ce ne sono infinite altre, date da

$$u(t) = \begin{cases} (t - c)^2 & \text{se } t \geq c \\ 0 & \text{se } t < c, \end{cases}$$

dove $c \geq 0$ è una costante arbitraria, oppure

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \geq c \\ -(t - c)^2 & \text{se } t < c, \end{cases}$$

dove $c \leq 0$, o anche

$$u(t) = \begin{cases} (t - c_2)^2 & \text{se } t \geq c_2 \\ 0 & \text{se } c_1 < t < c_2 \\ -(t - c_1)^2 & \text{se } t < c_1, \end{cases}$$

con $c_1 \leq 0 \leq c_2$.

Per avere anche l’unicità della soluzione, è necessario introdurre delle ipotesi aggiuntive sulla funzione f .

3.2 Alcune premesse sugli spazi metrici completi

Introduciamo ora il concetto di “completezza” per uno spazio metrico E . Diremo che $(a_n)_n$ è una “successione di Cauchy” in E se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} : [m \geq \bar{n} \text{ e } n \geq \bar{n}] \Rightarrow d(a_m, a_n) < \varepsilon .$$

Lo spazio metrico E si dirà “completo” se ogni successione di Cauchy ha un limite in E .

Si vede facilmente che, se $(a_n)_n$ ha un limite $\ell \in E$, allora è di Cauchy. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$, per m e n grandi si avrà che

$$d(a_m, a_n) \leq d(a_m, \ell) + d(\ell, a_n) < 2\varepsilon .$$

Il viceversa non è sempre vero (ad esempio, \mathbb{Q} non è completo). Si può però dimostrare che \mathbb{R} è completo, così come ogni \mathbb{R}^N (e quindi, in particolare, anche \mathbb{C}).

Nel seguito, considereremo l'insieme $C([a, b], \mathbb{R}^N)$, costituito dalle funzioni continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Si può definire in esso una norma:

$$\|f\|_\infty = \max\{\|f(x)\| : x \in [a, b]\};$$

sono infatti soddisfatte le quattro proprietà

- a) $\|f\|_\infty \geq 0$;
- b) $\|f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow f = \mathbf{0}$;
- c) $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$;
- d) $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Una volta verificate le proprietà della norma, è possibile definire la distanza

$$d(f, g) = \|f - g\|_\infty ,$$

Valgono infatti le seguenti proprietà:

- a) $d(f, g) \geq 0$;
- b) $d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$;
- c) $d(f, g) = d(g, f)$;
- d) $d(f, h) \leq d(f, g) + d(g, h)$.

A questo punto $C([a, b], \mathbb{R}^N)$ risulta essere uno spazio metrico. Si può dimostrare che anch'esso è completo.

Nel seguito, se per una successione $(f_n)_n$ in $C([a, b], \mathbb{R}^N)$ si ha che $\lim_n f_n = f$, ossia $\lim_n \|f_n - f\|_\infty = 0$, diremo che essa converge a f *uniformemente*.

Dato uno spazio metrico E , diremo che una funzione $\varphi : E \rightarrow E$ è una “contrazione” se, per un certo $\alpha < 1$, si ha

$$d(\varphi(v), \varphi(w)) \leq \alpha d(v, w) ,$$

per ogni $v, w \in E$. Enunciamo il “teorema delle contrazioni”.

Teorema 5 Se E è uno spazio metrico completo e $\varphi : E \rightarrow E$ è una contrazione, allora esiste un unico $x \in E$ tale che $\varphi(x) = x$. Inoltre, scegliendo $x_0 \in E$ arbitrariamente, la successione $(x_n)_n$ definita da

$$x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

è tale che $\lim_n x_n = x$.

Siccome $\varphi(x) = x$, si dice che x è un “punto fisso” di φ .

Dimostrazione. Consideriamo la successione $(x_n)_n$ definita come nell’enunciato, con $x_0 \in E$ arbitrario. Dimostriamo che è una successione di Cauchy. Osserviamo che, se m e n sono due numeri naturali, con $m < n$, si ha

$$d(x_m, x_n) \leq \sum_{k=m}^{n-1} d(x_k, x_{k+1}).$$

Dimostriamo per induzione che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale la seguente proposizione:

$$(P_k) \quad d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^k d(x_0, x_1).$$

Infatti, se $k = 0$ si ha chiaramente l’uguaglianza, per cui (P_0) è vera. Supponiamo ora vera (P_k) , per un certo $k \in \mathbb{N}$; allora

$$d(x_{k+1}, x_{k+2}) = d(\varphi(x_k), \varphi(x_{k+1})) \leq \alpha d(x_k, x_{k+1}) \leq \alpha^{k+1} d(x_0, x_1),$$

per cui è vera anche (P_{k+1}) .

Usando (P_k) , abbiamo quindi

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k d(x_0, x_1) \\ &\leq \alpha^m d(x_0, x_1) \sum_{k=0}^{n-1-m} \alpha^k \\ &= \alpha^m d(x_0, x_1) \frac{1 - \alpha^{n-m}}{1 - \alpha} \\ &\leq \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, siccome $\alpha \in [0, 1]$ esiste un $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad \alpha^m \frac{d(x_0, x_1)}{1 - \alpha} < \varepsilon.$$

Ne segue che

$$n > m \geq \bar{n} \quad \Rightarrow \quad d(x_m, x_n) < \varepsilon,$$

per cui $(x_n)_n$ è di Cauchy. Siccome E è completo, esiste il limite di $(x_n)_n$. Sia

$$\lim_n x_n = x \in E.$$

Allora, essendo φ continua,

$$\varphi(x) = \varphi(\lim_n x_n) = \lim_n \varphi(x_n) = \lim_n x_{n+1} = x,$$

il che dimostra che x è un punto fisso di φ .

Resta da dimostrare che il punto fisso è unico. Supponiamo che x' sia anch'esso un punto fisso di φ . Allora

$$d(x, x') = d(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \alpha d(x, x'),$$

e siccome $\alpha < 1$, deve essere $x = x'$. ■

3.3 Esistenza e unicità locale

Definizione 6 Diremo che la funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile se per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$ esiste un intorno U e una costante $\mathcal{L}_U > 0$ tale che

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq \mathcal{L}_U \|v - w\|,$$

per ogni (t, v) e (t, w) in U .

Saranno utili le seguenti due proposizioni.

Proposizione 7 La funzione $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ è localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile se e solo se per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esiste una costante $L_K > 0$ tale che

$$\|f(t, v) - f(t, w)\| \leq L_K \|v - w\|,$$

per ogni (t, v) e (t, w) in K .

Proposizione 8 Ogni funzione di classe C^1 è localmente lipschitziana.

Teorema 9 (di Cauchy–Lipschitz) Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora per ogni $(t_0, u_0) \in \Omega$ esiste un $r_0 > 0$ tale che il problema (PC) ha una ed una sola soluzione $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$. Inoltre, la successione di funzioni $(u_n)_n$, definita da

$$u_0(t) = u_0, \quad u_{n+1}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u_n(s)) ds,$$

è tale che $\lim_n u_n = u$, uniformemente su $[t_0 - r_0, t_0 + r_0]$.

Dimostrazione. Siano $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che³

$$K := [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times \bar{B}(u_0, r_2) \subseteq \Omega,$$

sia $L_K > 0$ la relativa costante di Lipschitz, e sia

$$M = \max\{\|f(t, u)\| : (t, u) \in K\}.$$

³Qui $\bar{B}(u_0, \rho)$ denota la palla chiusa centrata in u_0 di raggio $\rho > 0$.

Scegliamo $r_0 > 0$ tale che

$$r_0 < \min \left\{ r_1, \frac{r_2}{M}, \frac{1}{L_K} \right\}.$$

Poniamo $I_0 = [t_0 - r_0, t_0 + r_0]$ e

$$E = \{u \in C(I_0, \mathbb{R}^N) : \|u - u_0\|_\infty \leq r_2\}.$$

(Qui u_0 denota la funzione costante con quel valore.) Essendo un sottoinsieme chiuso di $C(I_0, \mathbb{R}^N)$, che è completo, risulta anch'esso completo. Sia φ la funzione che associa ad ogni $v \in E$ la funzione $\varphi(v) : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$[\varphi(v)](t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds.$$

Dimostriamo che $\varphi(v) \in E$. Infatti, $\varphi(v)$ è una funzione continua, e si ha

$$\|[\varphi(v)](t) - u_0\| = \left\| \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds \right\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, v(s))\| ds \right| \leq M|t - t_0| < r_2.$$

Quindi, abbiamo definito una funzione $\varphi : E \rightarrow E$. Notiamo inoltre che, prese v, w in E , si ha

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - \varphi(w)\|_\infty &= \sup\{\|[\varphi(v)](t) - [\varphi(w)](t)\| : t \in I_0\} \\ &= \sup \left\{ \left\| \int_{t_0}^t (f(s, v(s)) - f(s, w(s))) ds \right\| : t \in I_0 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \int_{t_0}^t \|f(s, v(s)) - f(s, w(s))\| ds \right| : t \in I_0 \right\} \\ &\leq \sup \left\{ \left| \int_{t_0}^t L_K \|v(s) - w(s)\| ds \right| : t \in I_0 \right\} \\ &\leq L_K r_0 \|v - w\|_\infty. \end{aligned}$$

Ponendo $\alpha = L_K r_0$, si ha quindi che $\alpha < 1$ e

$$\|\varphi(v) - \varphi(w)\|_\infty \leq \alpha \|v - w\|_\infty.$$

La funzione $\varphi : E \rightarrow E$ è pertanto una contrazione, e per il Teorema delle Contrazioni esiste un unico $u \in E$ tale che $\varphi(u) = u$. Allora

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, v(s)) ds, \quad \text{per ogni } t \in I_0,$$

per cui $u : [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una soluzione del nostro problema. Il Teorema delle Contrazioni assicura inoltre che la successione $(u_n)_n$ definita iterativamente in E da $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ converge a u , uniformemente. ■

3.4 L'unicità in grande

Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 2\sqrt{|u|} \\ u(0) = -1. \end{cases}$$

Poiché $u(0) = -1$, per continuità la soluzione u è negativa in un intorno di $t_0 = 0$; finché $u(t)$ non si annulla si può applicare il metodo di separazione delle variabili, che ci porta alla formula

$$u(t) = -(t - 1)^2.$$

Tale funzione si annulla per $t = 1$, dunque il metodo fornisce una soluzione definita nell'intervallo $] -\infty, 1]$. In tale intervallo la soluzione è unica. Nel punto $(1, 0)$ il campo vettoriale cessa di essere localmente lipschitziano; da tale punto si biforcano infinite soluzioni per $t > 1$. In particolare, le funzioni

$$u_c(y) = \begin{cases} -(t - 1)^2 & \text{se } t \leq 1 \\ 0 & \text{se } 1 < t < c \\ (t - c)^2 & \text{se } t \geq c, \end{cases}$$

al variare di $c > 0$, sono tutte soluzioni del problema di Cauchy in oggetto. Questo esempio dimostra che può esserci unicità locale ma non globale. La perdita dell'unicità nell'esempio precedente è dovuta al fatto che, pur essendoci unicità locale in un intorno di t_0 , la traiettoria della soluzione passa per un punto in cui si perdono la locale lipschitzianità del campo vettoriale e l'unicità delle soluzioni ivi passanti.

Teorema 10 *Sia f localmente lipschitziana e siano $u_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^N$, $u_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^N$ soluzioni del problema (PC), con I_1, I_2 intervalli aperti. Allora $u_1 = u_2$ su $I_1 \cap I_2$.*

Dimostrazione. Sia $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : u_1(s) = u_2(s) \text{ per ogni } s \in [t_0, t]\}$. Per assurdo, sia $t_1 = \sup J < \sup I_1 \cap I_2$, per cui $t_1 \in I_1 \cap I_2$. Applicando il Teorema di Cauchy–Lipschitz al problema di Cauchy con condizione iniziale $u(t_1) = u_1(t_1)$, si trova una contraddizione. Si giunge poi ad un'analogha contraddizione anche se $\inf J > \inf I_1 \cap I_2$. ■

4 Prolungabilità ed esistenza globale

Definizione 11 *Sia $u : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ una soluzione di (1). Diremo che una funzione $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$ è un "prolungamento" di u se I è un sottoinsieme proprio di I_* e u_* è anch'essa una soluzione di (1). Si dice che u è una "soluzione massimale" se non ammette prolungamenti. Il suo intervallo di definizione I viene allora detto "intervallo massimale di esistenza" di u .*

Proposizione 12 *L'intervallo massimale di esistenza di una soluzione è un intervallo aperto.*

Dimostrazione. Se per assurdo l'intervallo massimale I contenesse il suo estremo destro $b = \max I$, potrei considerare il problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t, v) \\ v(b) = u(b) \end{cases}$$

e trovarne una soluzione $v : [b - \delta, b + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^N$, per un certo $\delta > 0$. Sia allora $u_* : I \cup [b, b + \delta] \rightarrow \mathbb{R}^N$ definita da

$$u_*(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t \in I \\ v(t) & \text{se } t \in]b, b + \delta]. \end{cases}$$

Si può verificare che u_* è derivabile (anche nel punto b) ed è un prolungamento di u , in contraddizione con l'ipotesi. Analogamente se I contenesse il suo estremo sinistro. ■

Teorema 13 *Sia f localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Allora ogni soluzione u del problema (PC) si può prolungare in modo univoco a un intervallo massimale $] \alpha, \omega [$, con $-\infty \leq \alpha < \omega \leq +\infty$.*

Dimostrazione. Si consideri l'insieme \mathcal{S} di tutte le possibili soluzioni del problema (PC). Ogni $u \in \mathcal{S}$ avrà per dominio un intervallo, che indichiamo con I_u . Sia $I_* = \cup_{u \in \mathcal{S}} I_u$ e si definisca $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$ ponendo $u_*(t) = u(t)$ se $t \in I_u$. Bisogna verificare che questa è una buona definizione, cioè che il valore di $u_*(t)$ non dipende dalla scelta dell'intervallo I_u a cui t appartiene. Sia dunque $t \in I_u \cap I_v$, dove $u : I_u \rightarrow \mathbb{R}^N$ e $v : I_v \rightarrow \mathbb{R}^N$ sono due soluzioni del problema (PC). Per l'unicità, si ha che $u = v$ su $I_u \cap I_v$, per cui $u(t) = v(t)$.

Se ora $u^* : I^* \rightarrow \mathbb{R}^N$ è una soluzione che prolunga $u_* : I_* \rightarrow \mathbb{R}^N$, allora $u^* \in \mathcal{S}$, perciò per costruzione $I^* \subseteq I_*$. Quindi u_* non ammette prolungamenti: è una soluzione massimale. ■

Teorema 14 *Sia f localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, e sia u soluzione del problema (PC) sul suo intervallo massimale $] \alpha, \omega [$. Allora per ogni compatto $K_0 \subseteq \Omega$ contenente (t_0, x_0) esistono un $a_0 \in] \alpha, t_0 [$ e un $b_0 \in] t_0, \omega [$ tali che*

$$t \in] \alpha, a_0 [\cup] b_0, \omega [\Rightarrow (t, u(t)) \notin K_0.$$

Per la dimostrazione di questo teorema, avremo bisogno del seguente risultato preliminare.

Lemma 15 *Sia f localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile, e sia u soluzione del problema (PC) su un intervallo $] a, b [$. Se esiste una successione crescente $(t_n)_n$ in $] t_0, b [$ tale che $t_n \rightarrow b^-$ e $u(t_n) \rightarrow \bar{u}$, per un certo $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$, con $(b, \bar{u}) \in \Omega$, allora la soluzione u è prolungabile all'intervallo $] a, b [$.*

Dimostrazione. Definiamo la funzione $\tilde{u} :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ in questo modo:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t < b \\ \bar{u} & \text{se } t = b. \end{cases}$$

Siccome

$$u(t_n) = u_0 + \int_{t_0}^{t_n} f(s, u(s)) ds,$$

passando al limite per $n \rightarrow +\infty$ otteniamo

$$\tilde{u}(b) = u_0 + \int_{t_0}^b f(s, u(s)) ds = u_0 + \int_{t_0}^b f(s, \tilde{u}(s)) ds,$$

e pertanto

$$\tilde{u}(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, \tilde{u}(s)) ds, \quad \text{per ogni } t \in]a, b].$$

Se dimostriamo che \tilde{u} è continua, per il Teorema 3 avremo che essa è soluzione del problema (PC) sull'intervallo $]a, b]$, quindi è un prolungamento di u . Faremo quindi vedere che \tilde{u} è continua anche in b , ossia che $\lim_{t \rightarrow b^-} u(t) = \bar{u}$.

Siano $r_1 > 0$ e $r_2 > 0$ tali che

$$K := [b - r_1, b + r_1] \times \bar{B}(\bar{u}, r_2) \subseteq \Omega,$$

e sia

$$M = \max\{\|f(t, u)\| : (t, u) \in K\}.$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < \max\{4Mr_1, r_2\}$. Esiste un \bar{n} tale che, se $n \geq \bar{n}$, allora

$$b - t_n < \frac{\varepsilon}{4M} < r_1, \quad \|u(t_n) - \bar{u}\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vogliamo ora dimostrare che

$$t \in [t_{\bar{n}}, b[\Rightarrow \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Per assurdo, supponiamo che l'insieme

$$E = \left\{ t \in]t_{\bar{n}}, b[: \|u(t) - u(t_{\bar{n}})\| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

sia non vuoto, e poniamo $\tau = \inf E$. Per la continuità, $\|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| = \frac{\varepsilon}{2}$, e quindi $\tau > t_{\bar{n}}$. Notiamo inoltre che

$$\xi \in [t_{\bar{n}}, \tau[\Rightarrow \|u(\xi) - u(t_{\bar{n}})\| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow (\xi, u(\xi)) \in K.$$

Quindi,

$$\begin{aligned} \|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| &\leq \sup\{\|u'(\xi)\| : \xi \in [t_{\bar{n}}, \tau]\}(\tau - t_{\bar{n}}) \\ &= \sup\{\|f(\xi, u(\xi))\| : \xi \in [t_{\bar{n}}, \tau]\}(\tau - t_{\bar{n}}) \\ &\leq M(\tau - t_{\bar{n}}) \leq M(b - t_{\bar{n}}) < M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

una contraddizione, essendo $\|u(\tau) - u(t_{\bar{n}})\| = \frac{\varepsilon}{2}$. ■

Naturalmente, vale un lemma analogo se $t_n \rightarrow a^+$.

Dimostrazione del Teorema 14. Se $\omega = +\infty$, basta prendere $b_0 > t_0$ sufficientemente grande. Se $\omega \in \mathbb{R}$, supponiamo che esista un compatto $K_0 \subseteq \Omega$ e una successione crescente $(t_n)_n$ in $]t_0, \omega[$ tale che $t_n \rightarrow \omega^-$ e $(t_n, u(t_n)) \in K_0$. Per la compattezza di K_0 , esiste una sottosuccessione $(t_{n_k})_k$ tale che $(t_{n_k}, u(t_{n_k})) \rightarrow (\omega, \bar{u}) \in K_0$, per un certo $\bar{u} \in \mathbb{R}^N$. Per il Lemma 15, la soluzione u si può estendere a $]\alpha, \omega]$, una contraddizione. Analogo ragionamento per α . ■

Osserviamo che, anche quando l'insieme Ω ha una proiezione sulla coordinata t che coincide con tutto \mathbb{R} , l'intervallo di esistenza massimale $]\alpha, \beta[$ potrebbe essere un sottoinsieme proprio di \mathbb{R} . Ad esempio, sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(u) = u^2$. Si verifica subito che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = u^2 \\ u(0) = 1 \end{cases}$$

ha come soluzione $u(t) = (1 - t)^{-1}$, per cui $]\alpha, \beta[=] - \infty, 1[$.

Per garantire l'“esistenza globale” della soluzione u , è necessario controllarne la crescita in norma. Ad esempio, si può dimostrare il seguente risultato, dove $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Teorema 16 *Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Se inoltre esiste una funzione continua $\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ per cui*

$$\|f(t, v)\| \leq \ell(t)(\|v\| + 1), \quad (3)$$

per ogni $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, allora la soluzione del problema (PC) si può prolungare in modo univoco a tutto \mathbb{R} .

Nella dimostrazione avremo bisogno del seguente

Lemma 17 (di Gronwall) *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, $t_0 \in I$ e $\nu : I \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione continua. Se esistono $\alpha, \beta \in [0, +\infty[$ tali che*

$$\nu(t) \leq \alpha + \beta \left| \int_{t_0}^t \nu(s) ds \right|, \quad \text{per ogni } t \in I,$$

allora

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta|t-t_0|}, \quad \text{per ogni } t \in I.$$

Dimostrazione del Lemma. Consideriamo dapprima l'intervallo $I \cap [t_0, +\infty[$. Fissiamo un $\varepsilon > 0$ e definiamo la funzione $\phi_\varepsilon : I \cap [t_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\phi_\varepsilon(t) = \alpha + \varepsilon + \beta \int_{t_0}^t \nu(s) ds.$$

Si noti che $\phi_\varepsilon(t) > \nu(t) \geq 0$. Allora, per ogni $t \in I \cap [t_0, +\infty[$,

$$\phi'_\varepsilon(t) = \beta \nu(t) \leq \beta \phi_\varepsilon(t),$$

per cui

$$\frac{d}{dt} \ln \phi_\varepsilon(t) \leq \beta.$$

Integrando su $[t_0, t]$,

$$\ln \frac{\phi_\varepsilon(t)}{\phi_\varepsilon(t_0)} \leq \beta(t - t_0),$$

da cui

$$\nu(t) \leq \phi_\varepsilon(t) \leq \phi_\varepsilon(t_0)e^{\beta(t-t_0)} = (\alpha + \varepsilon)e^{\beta(t-t_0)},$$

per ogni $t \in I \cap [t_0, +\infty[$ e ogni $\varepsilon > 0$. Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$, si ottiene

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta(t-t_0)}, \quad \text{per ogni } t \in I \cap [t_0, +\infty[.$$

Consideriamo ora l'intervallo $I \cap]-\infty, t_0]$. Definiamo l'intervallo $J = \{\tau \in \mathbb{R} : \tau = 2t_0 - t, \text{ con } t \in I\}$ e la funzione $w : J \rightarrow [0, +\infty[$ definita da $w(\tau) = \nu(2t_0 - \tau)$. Se $t \in I \cap]-\infty, t_0]$, allora $\tau = 2t_0 - t \in J \cap [t_0, +\infty[$ e

$$w(\tau) = \nu(2t_0 - \tau) \leq \alpha + \beta \int_{2t_0 - \tau}^{t_0} \nu(s) ds = \alpha + \beta \int_{t_0}^{\tau} w(\sigma) d\sigma.$$

Per quanto visto sopra,

$$w(\tau) \leq \alpha e^{\beta(\tau-t_0)}, \quad \text{per ogni } \tau \in J \cap [t_0, +\infty[,$$

per cui

$$\nu(t) \leq \alpha e^{\beta(t_0-t)}, \quad \text{per ogni } t \in I \cap]-\infty, t_0].$$

La dimostrazione è così completa. ■

Dimostrazione del Teorema 16. Sia $u :]\alpha, \omega[\rightarrow \mathbb{R}^N$ una soluzione del problema (PC), definita sul suo intervallo massimale, con $\alpha < t_0 < \omega$. Supponiamo per assurdo che $\omega \in \mathbb{R}$, e poniamo

$$\ell_1 = \max\{\ell(t) : t \in [t_0, \omega]\}, \quad R = [\|u_0\| + \ell_1|\omega - t_0|] e^{\ell_1(\omega-t_0)}.$$

Preso il compatto $K_0 = [t_0, \omega] \times \overline{B}(0, R)$, possiamo applicare il Teorema 14 e trovare un $b_0 \in]t_0, \omega[$ tale che

$$t \in]b_0, \omega[\Rightarrow u(t) \notin \overline{B}(0, R).$$

D'altra parte, per ogni $t \in [t_0, \omega[$,

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &= \left\| u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \right\| \\ &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s))\| ds \\ &\leq \|u_0\| + \int_{t_0}^t \ell(s)(\|u(s)\| + 1) ds \\ &\leq [\|u_0\| + \ell_1(\omega - t_0)] + \ell_1 \int_{t_0}^t \|u(s)\| ds. \end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall, con $\nu(t) = \|u(t)\|$, abbiamo che, per ogni $t \in [t_0, \omega[$,

$$\|u(t)\| \leq [\|u_0\| + \ell_1(\omega - t_0)]e^{\ell_1(t-t_0)} < R,$$

una contraddizione. ■

5 Dipendenza dai dati

Nelle applicazioni è importante avere una “dipendenza continua” dai dati del problema che si vuole studiare. Infatti, le misurazioni non sono mai esatte, ma presentano delle piccole imprecisioni, che però non dovrebbero influire troppo sulle previsioni date dal modello matematico.

Nell’enunciato seguente, supponiamo per semplicità che sia $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

Teorema 18 *Sia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile e sia $\ell : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione continua tale che*

$$\|f(t, v)\| \leq \ell(t)(\|v\| + 1), \quad (4)$$

per ogni $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Sia u la soluzione massimale del problema (PC). Allora u è definita su tutto \mathbb{R} . Inoltre, fissati a, b tali che $a < t_0 < b$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ tale che, se $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ e $\tilde{f} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ soddisfano

$$|\tilde{t}_0 - t_0| + \|\tilde{u}_0 - u_0\| + \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta,^4$$

allora ogni soluzione massimale \tilde{u} del problema di Cauchy

$$(\widetilde{PC}) \quad \begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

è definita su tutto \mathbb{R} e

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

Dimostrazione. Per il Teorema 16, la soluzione u è definita su tutto \mathbb{R} . Prenderemo inoltre $\delta \in]0, 1]$, per cui si trova facilmente una funzione continua $\hat{\ell} : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ tale che, se $\|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta$, allora

$$\|\tilde{f}(t, v)\| \leq \hat{\ell}(t)(\|v\| + 1),$$

per ogni $(t, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Tutte le soluzioni \tilde{u} sono pertanto definite su tutto \mathbb{R} , e seguendo la dimostrazione del Teorema 16, ponendo $\hat{\ell}_1 = \max\{\hat{\ell}(t) : t \in [a, b]\}$, se $\tilde{t}_0 \in [a, b]$ e $\|\tilde{u}_0 - u_0\| < \delta$ si ha che

$$\|\tilde{u}(t)\| \leq [(\|u_0\| + 1) + \hat{\ell}_1(b - a)]e^{\hat{\ell}_1(b-a)} := R.$$

⁴Qui $\|g\|_\infty = \sup\{g(t, x) : (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N\}$.

Sia $K = [a, b] \times \overline{B}(0, R)$, un compatto, sia L_K la relativa costante di Lipschitz di f su K (vedi la Proposizione 7), e sia

$$M = \max\{\|f(t, v)\| : (t, v) \in K\}.$$

Siccome $\delta \leq 1$, abbiamo che

$$\max\{\|\tilde{f}(t, v)\| : (t, v) \in K\} \leq M + 1.$$

Scriviamo

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds, \quad \tilde{u}(t) = \tilde{u}_0 + \int_{\tilde{t}_0}^t \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) ds.$$

Allora, per $t > t_0$,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &= \left\| u_0 - \tilde{u}_0 + \int_{t_0}^t (f(s, u(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{u}(s))) ds + \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \tilde{f}(s, \tilde{u}(s)) ds \right\| \\ &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + \int_{t_0}^t \|f(s, u(s)) - f(s, \tilde{u}(s))\| ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^t \|f(s, \tilde{u}(s)) - \tilde{f}(s, \tilde{u}(s))\| ds + \left| \int_{t_0}^{\tilde{t}_0} \|\tilde{f}(s, \tilde{u}(s))\| ds \right| \\ &\leq \|u_0 - \tilde{u}_0\| + L_K \int_{t_0}^t \|u(s) - \tilde{u}(s)\| ds + (b - a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M + 1)|t_0 - \tilde{t}_0|. \end{aligned}$$

Per il Lemma di Gronwall,

$$\begin{aligned} \|u(t) - \tilde{u}(t)\| &\leq \left[\|u_0 - \tilde{u}_0\| + (b - a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M + 1)|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L_K(t-t_0)} \\ &\leq \left[\|u_0 - \tilde{u}_0\| + (b - a)\|f - \tilde{f}\|_\infty + (M + 1)|t_0 - \tilde{t}_0| \right] e^{L_K(b-a)}. \end{aligned}$$

Analogamente se $t < t_0$. Da qui la conclusione. \blacksquare

Si potrebbe dimostrare un risultato più generale, che qui solo enunciamo.

Teorema 19 *Sia $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitziana rispetto alla seconda variabile. Indichiamo con u la soluzione del problema (PC), definita sull'intervallo massimale $] \alpha, \beta[$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ e ogni intervallo compatto $[a, b] \subseteq] \alpha, \beta[$, contenente al suo interno t_0 , esiste un $\delta > 0$ tale che, se $(\tilde{t}_0, \tilde{u}_0) \in \Omega$ e $\tilde{f} \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ soddisfano*

$$|\tilde{t}_0 - t_0| + \|\tilde{u}_0 - u_0\| + \|\tilde{f} - f\|_\infty < \delta,$$

allora ogni soluzione \tilde{u} del problema di Cauchy

$$(\widetilde{PC}) \quad \begin{cases} u' = \tilde{f}(t, u) \\ u(\tilde{t}_0) = \tilde{u}_0 \end{cases}$$

si può estendere al dominio $[a, b]$ e

$$\|\tilde{u}(t) - u(t)\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \in [a, b].$$

6 Stabilità degli equilibri

Consideriamo un'equazione differenziale autonoma

$$u' = f(u), \quad (5)$$

con $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continua. Si dice che $u_0 \in \Omega$ è un “equilibrio” o “punto stazionario” dell'equazione differenziale (5) se $f(u_0) = 0$. In altri termini, la funzione costante $u(t) = u_0$ è una soluzione dell'equazione differenziale (5).

Definizione 20 Diremo che un punto di equilibrio u_0 è “stabile” se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta > 0$ con la seguente proprietà: se per una soluzione u e per un certo $\tau \in \mathbb{R}$ si ha che $\|u(\tau) - u_0\| < \delta$, allora

$$\|u(t) - u_0\| < \varepsilon, \quad \text{per ogni } t \geq \tau.$$

Diremo che un equilibrio u_0 è “asintoticamente stabile” se è stabile ed esiste un $\delta' > 0$ con la seguente proprietà: se per una soluzione u e per un certo $\tau \in \mathbb{R}$ si ha che $\|u(\tau) - u_0\| < \delta'$, allora

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = u_0.$$

Nel caso in cui $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ sia di classe C^1 , abbiamo il seguente.

Teorema 21 Sia u_0 un equilibrio per l'equazione differenziale (5). Se gli autovalori della matrice jacobiana $Jf(u_0)$ hanno tutti parte reale negativa, allora u_0 è asintoticamente stabile. Se esiste un autovalore con parte reale positiva, tale equilibrio non è stabile.

Come esempio, analizziamo la ben nota equazione del pendolo matematico

$$\vartheta'' + c\vartheta' + \frac{g}{\ell} \sin \vartheta = 0,$$

dove g è la costante di gravità e ℓ è la lunghezza del pendolo. Qui $c \geq 0$ è un coefficiente di attrito.

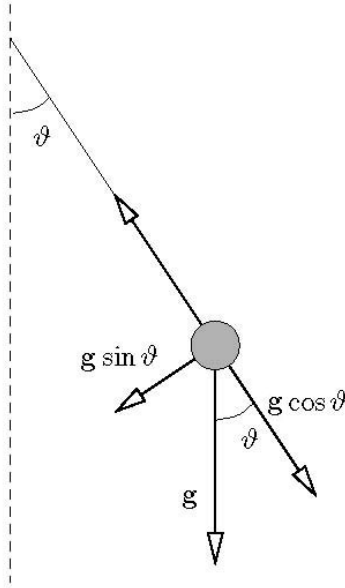
Ponendo $a = g/\ell$, passiamo al sistema equivalente nel piano delle fasi

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -cy - a \sin x. \end{cases}$$

Troviamo facilmente gli equilibri: sono i punti del tipo $(k\pi, 0)$, con $k \in \mathbb{Z}$. Siccome la funzione seno è 2π -periodica, ci sono due punti di equilibrio geometricamente distinti, $(0, 0)$ e $(\pi, 0)$, mentre tutti gli altri si ottengono da questi per 2π -periodicità. Studiamo la stabilità di questi due punti di equilibrio. Calcoliamo

$$Jf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -c \end{pmatrix}, \quad Jf(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & -c \end{pmatrix}.$$

Gli autovalori di $Jf(0, 0)$ sono le soluzioni di $\lambda^2 + c\lambda + a = 0$. Se $c^2 > 4a$, sono entrambi reali e negativi: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 - 4a})$; se $c^2 \in]0, 4a[$, sono complessi coniugati, con parte reale negativa: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-c \pm i\sqrt{4a - c^2})$; Se $c = 0$, sono uguali a $\pm i\sqrt{a}$, quindi hanno parte reale nulla.



Gli autovalori di $Jf(\pi, 0)$ sono le soluzioni di $\lambda^2 + c\lambda - a = 0$. Essi sono entrambi reali, uno positivo e uno negativo: $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-c \pm \sqrt{c^2 + 4a})$.

Possiamo quindi concludere che l'equilibrio $(\pi, 0)$ non è stabile, mentre l'equilibrio $(0, 0)$ è stabile se $c > 0$.

Il caso $c = 0$ va trattato a parte. Definiamo la seguente “funzione hamiltoniana”

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - a \cos x.$$

Si noti che il sistema

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -a \sin x \end{cases}$$

è del tipo

$$\begin{cases} x' = \frac{\partial H}{\partial y}(x, y), \\ y' = -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y). \end{cases}$$

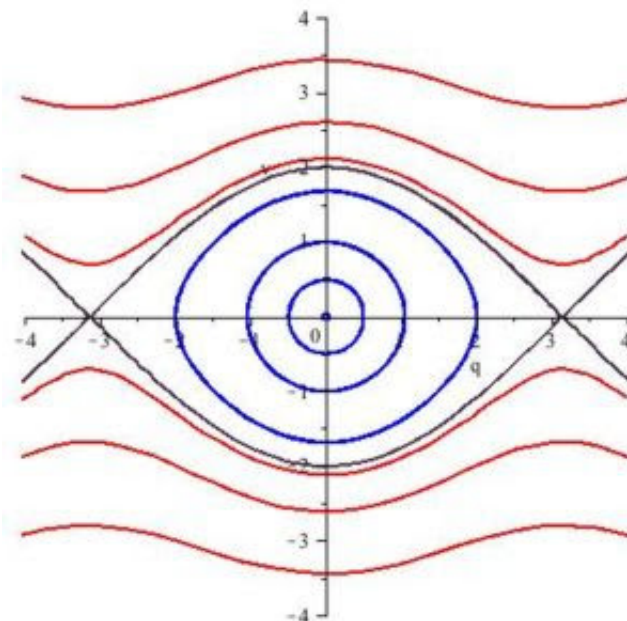
Esso è pertanto un “sistema hamiltoniano”. Per questo tipo di sistemi, se $(x(t), y(t))$ è una qualunque soluzione, allora

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial H}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) \\ &= -y'(t)x'(t) + x'(t)y'(t) = 0, \end{aligned}$$

per cui $H(x(t), y(t))$ rimane costante al variare di t . Le orbite delle soluzioni sono pertanto le linee di livello

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : H(x, y) = c\},$$

dove $c \in \mathbb{R}$ è una costante che può assumere svariati valori; esse sono visualizzate in figura. Siccome la funzione coseno è 2π -periodica, le linee di livello della funzione hamiltoniana presentano questo tipo di periodicità nella variabile x .



Il punto di equilibrio $(0,0)$ è un “centro”: tutte le soluzioni vicine sono periodiche. Esso è pertanto stabile. Se indichiamo con $\tau(\alpha)$ il periodo della soluzione con punto iniziale $x(0) = \alpha$, $y(0) = 0$, si vede che, al variare di α in $]0, \pi[$, il periodo $\tau(\alpha)$ è strettamente crescente, e

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \tau(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}, \quad \lim_{\alpha \rightarrow \pi^-} \tau(\alpha) = +\infty.$$

Il punto di equilibrio $(\pi, 0)$ è una “sella”. Esso è il punto di arrivo asintotico di una soluzione $(x^*(t), y^*(t))$, detta “eteroclina”, per la quale si ha

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x^*(t) = -\pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x^*(t) = \pi, \quad \text{e } y^*(t) > 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

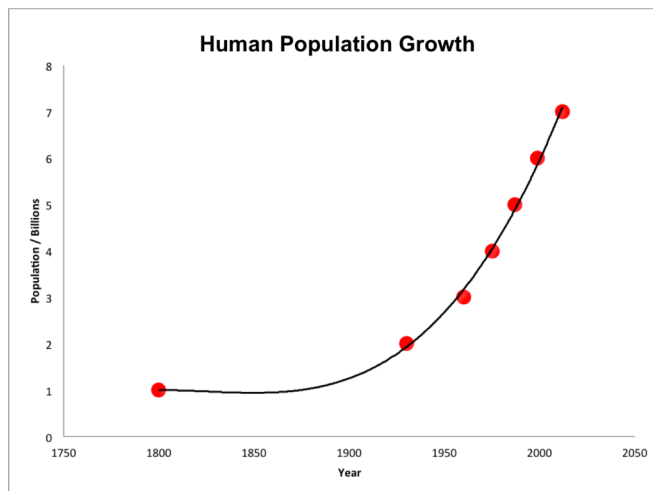
Abbiamo anche la soluzione eteroclina simmetrica $(x_*(t), y_*(t))$, tale che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x_*(t) = \pi, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_*(t) = -\pi, \quad \text{e } y_*(t) < 0, \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R}.$$

Le soluzioni la cui orbita attraversa l’asse verticale al di sopra del valore $2\sqrt{a}$ o al di sotto di $-2\sqrt{a}$ non sono periodiche. Esse corrispondono alla situazione fisica in cui il pendolo continua a ruotare in senso antiorario oppure orario, rispettivamente.

6.1 Dinamica delle popolazioni

Vogliamo studiare alcuni modelli di distribuzione di specie (animali o vegetali) in un ecosistema. Cominciamo esaminando la crescita della popolazione umana mondiale negli ultimi due secoli.



Una prima interpretazione, per quanto imprecisa, ci fa pensare a una crescita di tipo esponenziale. Uno dei primi modelli di crescita, proposto da Malthus nel 1798, prevede proprio questo tipo di sviluppo. Esso si basa sulla semplice ipotesi che il tasso di crescita sia proporzionale alla numerosità della popolazione.⁵

Indichiamo con $u(t)$ una misura di densità della numerosità della specie u al tempo t . Per poter trattare più facilmente il problema con i metodi dell'analisi matematica, si suppone che $u(t)$ vari in modo continuo al variare di t . Questa ipotesi potrebbe sembrare strana, visto che il numero di individui è sempre un intero, ma diventa ragionevole se tale numero è molto elevato e i cambiamenti (nascite, morti o migrazioni) avvengono in modo casuale.

Il modello di Malthus è allora esprimibile con l'equazione differenziale

$$u' = \alpha u,$$

che, com'è noto, ha la soluzione

$$u(t) = u_0 e^{\alpha t}.$$

Una crescita di questo tipo si può verificare in laboratorio osservando una coltura di batteri. Questi si riproducono duplicandosi, a intervalli di tempo regolari, pertanto il loro numero segue una legge di tipo esponenziale. A un certo punto, però, la loro quantità tende a stabilizzarsi verso un limite, noto come *capacità portante*. Ecco che un modello più preciso deve tener conto di una competizione intraspecifica, dovuta alle risorse limitate. Nel 1838, Verhulst ha proposto l'equazione differenziale

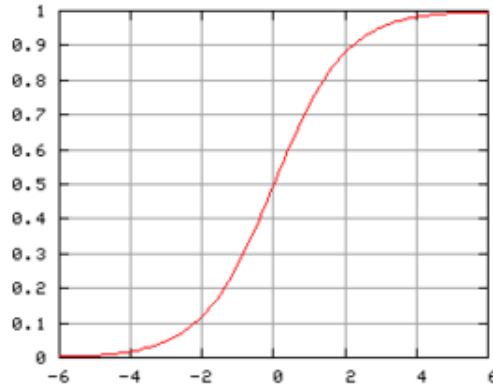
$$u' = \alpha u \left(1 - \frac{u}{K} \right),$$

⁵Questo modello si applica piuttosto bene a diverse situazioni, sia della biologia che di altre discipline.

nota come *equazione logistica*. Essa si può risolvere esplicitamente:

$$u(t) = \frac{K u_0 e^{\alpha t}}{K + u_0 (e^{\alpha t} - 1)},$$

e un possibile grafico è rappresentato nella sottostante figura.



6.2 Interazione tra popolazioni

Passiamo ora a discutere un sistema in cui ci sia interazione tra diverse specie. Si possono presentare diverse situazioni: le specie possono essere l'una preda dell'altra, oppure competere per la sopravvivenza, o ancora cooperare, essere in simbiosi. Analizzeremo questi tre casi separatamente supponendo dapprima di avere a che fare con due sole specie. Anche in questa lezione supponiamo che non ci sia dipendenza dalla posizione x .

1. Modello preda-predatore

Il primo modello che presentiamo, forse il più semplice, è quello di Lotka–Volterra per un sistema *preda-predatore*. Indichiamo con $u(t)$ e $v(t)$ la quantità di prede e di predatori, rispettivamente. Il modello è il seguente:

$$\begin{cases} x' = x(\alpha - \beta y), \\ y' = y(-\gamma + \delta x). \end{cases}$$

Qui le costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono tutte positive. Notiamo che, in assenza di predatori, le prede seguono l'equazione di Malthus $x' = \alpha x$, per cui la loro crescita è di tipo esponenziale. Introducendo i predatori, il fattore di interazione $-\beta xy$ limita la crescita delle prede. Al contrario, in assenza di prede, i predatori seguono l'equazione $y' = -\delta y$, per cui il loro numero decresce esponenzialmente, e sono destinati a estinguersi. Qualora ci siano prede in giro, il fattore δxy ravviva i predatori, che possono così crescere di numero.

Esamineremo ora il sistema preda-predatore, limitandoci allo studio delle soluzioni positive. Si osserva subito che esiste un punto di equilibrio, precisamente

$$\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta} \right).$$

Uno studio della matrice jacobiana in questo punto ci mostra che gli autovalori hanno parte reale nulla. Per studiarne la stabilità, dobbiamo pertanto usare qualche altro stratagemma.

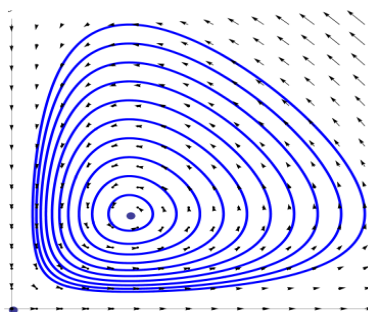
Siccome abbiamo deciso di studiare le soluzioni con $x(t) > 0$ e $y(t) > 0$, definiamo le funzioni $u_1(t) = \ln x(t)$, $u_2(t) = \ln y(t)$. Abbiamo che

$$\begin{cases} u_1'(t) = \frac{x'(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y(t) = \alpha - \beta e^{u_2(t)}, \\ u_2'(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} = -\gamma + \delta x(t) = -\gamma + \delta e^{u_1(t)}. \end{cases}$$

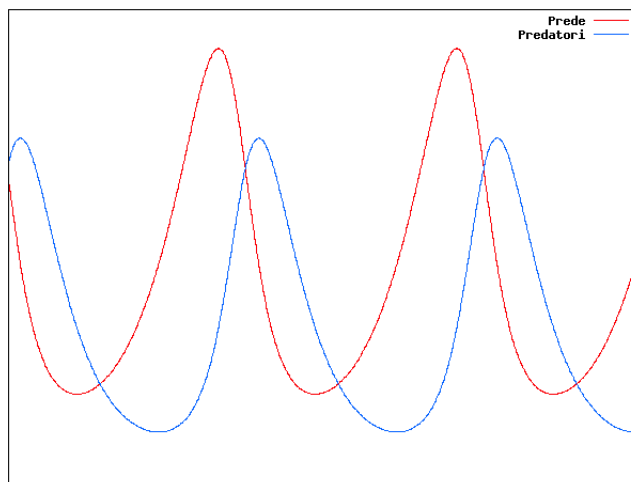
Per questo sistema c'è una funzione hamiltoniana:

$$H(u_1, u_2) = \delta e^{u_1} - \gamma u_1 + \beta e^{u_2} - \alpha u_2.$$

Le soluzioni stanno sulle linee di livello di questa funzione, che sono tutte curve chiuse. Tornando al piano delle fasi iniziale, abbiamo il seguente diagramma.



Le soluzioni sono periodiche e ruotano attorno al punto di equilibrio, in senso antiorario. Vediamo un possibile grafico di $x(t)$ e di $y(t)$.



Questo semplice modello, formulato intorno al 1920, può essere reso più realistico usando le idee introdotte nello studio di una singola popolazione. Ad esempio, la crescita alla Malthus delle prede potrebbe essere sostituita con

una crescita alla Verhulst, o con funzioni di crescita più sofisticate. Potrebbero essere introdotti anche un ritardo, costante o di tipo integrale, e perturbazioni stagionali. Lo stesso vale per i predatori, naturalmente. Questi modelli sono in fase di studio e alimentano molta ricerca attuale. Si possono trovare soluzioni periodiche, o quasi periodiche, studiarne la stabilità al variare dei parametri e delle condizioni iniziali. In alcuni casi si è persino evidenziato il fenomeno del *chaos*, parola usata in situazioni di estrema instabilità, per cui piccolissime variazioni iniziali possono portare a un evolversi delle soluzioni del tutto imprevedibile.

Risulta molto importante, in questo contesto, il problema della *persistenza* di tutte le specie. Le oscillazioni osservate potrebbero infatti portare, nella realtà, all'estinzione delle prede o dei predatori.

2. Due specie in competizione

Supponiamo di avere due specie che competono per la sopravvivenza (ad esempio, hanno le stesse risorse di nutrimento, che sono limitate). Possiamo assumere che, in assenza dell'altra specie, ciascuna abbia una crescita di tipo logistico. Un modello plausibile è il seguente:

$$\begin{cases} x' = \alpha_1 x \left(1 - \frac{x + b_{12}y}{K_1} \right), \\ y' = \alpha_2 y \left(1 - \frac{y + b_{21}x}{K_2} \right). \end{cases}$$

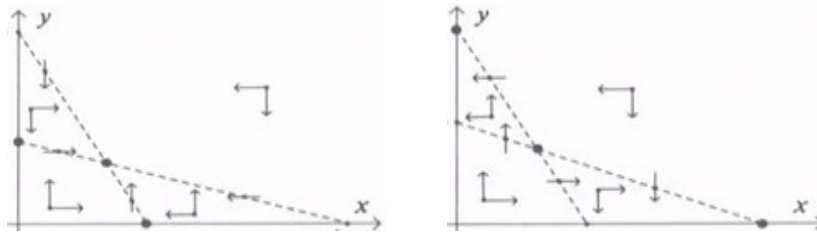
Anche qui le costanti $\alpha_1, \alpha_2, K_1, K_2, b_{12}, b_{21}$ sono tutte positive. In particolare, b_{12} misura l'effetto della specie v sulla crescita di u , mentre b_{21} misura l'effetto di u sulla crescita di v . A seconda dei parametri

$$a_{12} = b_{12} \frac{K_2}{K_1}, \quad a_{21} = b_{21} \frac{K_1}{K_2},$$

possono verificarsi essenzialmente quattro situazioni diverse.

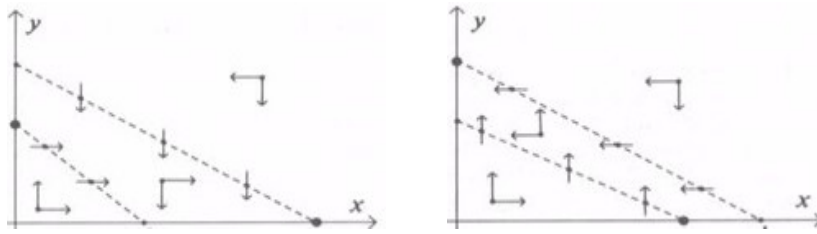
I caso: $a_{12} < 1$ e $a_{21} < 1$. Qui c'è un equilibrio stabile nel primo quadrante del piano delle fasi: le due specie possono coesistere.

II caso: $a_{12} > 1$ e $a_{21} > 1$. Anche qui c'è un equilibrio, ma è instabile. A seconda delle condizioni iniziali, una delle due specie si estinguerà.



III caso: $a_{12} < 1$ e $a_{21} > 1$. Non ci sono equilibri nel primo quadrante, la specie v si estingue, mentre la u si stabilizza verso la sua capacità portante K_1 .

IV caso: $a_{12} > 1$ e $a_{21} < 1$. Anche qui non ci sono equilibri nel primo quadrante, la specie u si estingue, mentre la v si stabilizza verso la sua capacità portante K_2 .



7 Diffusione di epidemie

Nel 1927 Kermack e McKendrick introdussero il cosiddetto modello SIR con lo scopo di studiare l'epidemia di peste presentatasi a Bombay nel 1905-1906. Esso prende il nome dai compartimenti i cui si suddivide la popolazione: suscettibili, infetti e rimossi. Essi fecero le seguenti ipotesi:

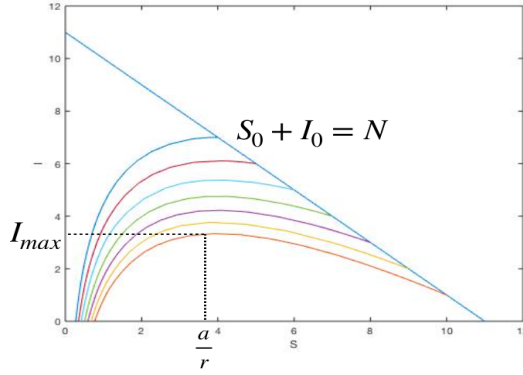
- tutti gli individui suscettibili sono infettabili nello stesso modo;
- le persone infette sono tutte ugualmente contagiose;
- una volta rimosse esse risultano immuni alla malattia.

Consideriamo malattie per le quali il contagio possa avvenire solo tramite contatto diretto tra due persone (una infetta e una suscettibile) e supponiamo che l'essere infetto non modifichi le abitudini del soggetto (non diminuiranno, quindi, i contatti con altre persone). Studieremo inoltre un'epidemia che si sviluppi in un periodo di tempo relativamente breve, per trascurare il numero di nascite o morti naturali.

Denotando con $S(t)$ il numero di suscettibili al tempo t , con $I(t)$ il numero degli infetti e con $R(t)$ il numero dei rimossi (che comprende sia i guariti che i morti), il modello proposto è il seguente:

$$\begin{cases} S'(t) = -\alpha S(t)I(t) \\ I'(t) = \alpha S(t)I(t) - \beta I(t) \\ R'(t) = \beta I(t). \end{cases}$$

Studiando le soluzioni di questo sistema si può osservare che, partendo da un numero basso di infetti, la malattia solitamente si sviluppa fino a che il numero di infetti raggiunge un massimo, per poi tendere a zero. Nel frattempo, molti suscettibili si ammalano, ma la cosa sorprendente è che un certo numero di essi non verrà mai contagiato, rimanendo quindi sempre sano. Questo fatto si può osservare dalla figura seguente, dove vengono rappresentate le curve $(S(t), I(t))$ con diversi valori iniziali. Le orbite vengono percorse da destra a sinistra e, dopo aver raggiunto il loro massimo, tendono ad avvicinarsi all'asse orizzontale, in un punto che rappresenta la fine dell'epidemia.



8 Risonanza non lineare

Ci proponiamo ora di studiare su un paio di esempi semplici il comportamento di un oscillatore non lineare, nel caso in cui venga sollecitato da una forza periodica nel tempo. Ci interessa in particolare capire se sia ancora possibile definire il concetto di “risonanza”.

8.1 L’oscillatore asimmetrico

Per dare una risposta parziale alla nostra domanda, affrontiamo lo studio degli oscillatori asimmetrici. Consideriamo l’equazione differenziale scalare

$$x'' + \mu x^+ - \nu x^- = e(t), \quad (6)$$

dove $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua e T -periodica e $\mu > 0$, $\nu > 0$ sono due numeri reali. Qui

$$x^+ = \max\{x, 0\} = \frac{x + |x|}{2}, \quad x^- = \max\{-x, 0\} = \frac{-x + |x|}{2}.$$

Si noti che $x = x^+ - x^-$, mentre $|x| = x^+ + x^-$. Se $\mu = \nu$, l’equazione è lineare e rappresenta un oscillatore armonico. Essendo μ e ν positivi, le soluzioni dell’equazione

$$x'' + \mu x^+ - \nu x^- = 0 \quad (7)$$

sono tutte periodiche di periodo

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}.$$

Una soluzione è data da

$$\phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\mu}} \sin(\sqrt{\mu}t) & \text{se } t \in \left[0, \frac{\pi}{\sqrt{\mu}}\right], \\ \frac{1}{\sqrt{\nu}} \sin\left(\sqrt{\nu}\left(\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} - t\right)\right) & \text{se } t \in \left[\frac{\pi}{\sqrt{\mu}}, \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}}\right], \end{cases}$$

estesa a tutto \mathbb{R} in modo da risultare τ -periodica. Tutte le altre soluzioni di (7) sono del tipo $x(t) = \rho\phi(t + \theta)$, con $\rho \geq 0$ e $\theta \in [0, \tau[$.

Se scriviamo il sistema equivalente

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\mu x^+ + \nu x^-, \end{cases}$$

vediamo che le orbite nel piano delle fasi sono curve chiuse che circondano l'origine, il quale pertanto è un centro isocrono. Ognuna di queste curve è ottenuta incollando assieme due semi-ellissi, ossia

$$\{(x, y) : x \geq 0 \text{ e } y^2 + \mu x^2 = c\} \cup \{(x, y) : x \leq 0 \text{ e } y^2 + \nu x^2 = c\},$$

con $c \geq 0$.

Indichiamo con Σ l'insieme delle coppie (μ, ν) per cui l'equazione (7) ha soluzioni T -periodiche non nulle. Si vede allora che Σ contiene, oltre ai due assi cartesiani $\{\mu = 0\}$ e $\{\nu = 0\}$, una successione $(C_N)_{N \geq 1}$ di curve:

$$C_N = \left\{ (\mu, \nu) \in \mathbb{R}^2 : \mu > 0, \nu > 0, N \left(\frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} \right) = T \right\}.$$

L'insieme Σ è spesso chiamato “spettro di Fučík”.

A differenza dell'equazione lineare, non è pensabile di scrivere le soluzioni T -periodiche di (6) in modo esplicito. Possiamo comunque enunciare alcuni risultati sulla dinamica delle soluzioni dell'equazione (6). Ecco il risultato di Fučík, pubblicato nel 1976.

Teorema 22 *Se $(\mu, \nu) \notin \Sigma$, allora l'equazione (6) ha almeno una soluzione T -periodica.*

Supponiamo ora che sia $(\mu, \nu) \in \Sigma$, per cui esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che

$$\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\mu}} + \frac{\pi}{\sqrt{\nu}} = \frac{T}{N}.$$

In tal caso, esistono delle funzioni T -periodiche $e(t)$ per le quali le soluzioni dell'equazione (6) sono tutte illimitate. Siamo di fronte al fenomeno della *risonanza*.

8.2 Ponti sospesi

Un ponte è una struttura complessa, le cui componenti sono soggette a varie forme di sollecitazioni. I più lunghi al mondo sono tutti di tipo *ponte sospeso*. Attualmente il ponte di Akashi, in Giappone, detiene il record di lunghezza della campata centrale, con i suoi 1991 metri.

Scorrendo la lista dei ponti sospesi più lunghi, vedi ad esempio

https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_longest_suspension_bridge_spans



si trovano al diciassettesimo e al diciottesimo posto il Ponte di Verrazzano a New York (1298 metri) e il Golden Gate Bridge a San Francisco (1280 metri). È notevole il fatto che quest'ultimo sia stato costruito nel 1937, più di ottanta anni fa, ed è tuttora in uso. Tre anni dopo fu costruito un altro ponte, che però non ebbe altrettanta fortuna.

Inaugurato il 1° luglio 1940, il Ponte di Tacoma Narrows divenne subito famoso per la sua caratteristica di oscillare verticalmente, in presenza di vento trasversale, con oscillazioni di uno-due metri di ampiezza. Questo comportamento inusuale era dovuto al fatto che il ponte aveva una sezione molto stretta e di piccolo spessore, per cui risultava molto flessibile rispetto ai ponti costruiti fino ad allora.

Il mattino del 7 novembre 1940 il ponte stava oscillando, come al solito, quando improvvisamente le oscillazioni verticali si trasformarono in oscillazioni trasversali. Queste aumentarono in ampiezza fino a superare l'angolo di 45° e, alle ore 11:10, la struttura cedette precipitando nel mare sottostante. Il breve documentario su

www.youtube.com/watch?v=KVc7oBKzq9U

mostra la sequenza delle oscillazioni del ponte prima del crollo, e ne attribuisce la causa al fenomeno della *risonanza*.

Questo fenomeno è ben noto per i sistemi *lineari*. Esso entra in gioco quando la frequenza di un termine forzante periodico risulta uguale alla frequenza delle oscillazioni libere della struttura. Si è allora ipotizzato che la forza periodica agente sulla struttura fosse provocata dai *vortici di von Karman*, che si alternano in modo periodico al passare del fluido lungo la struttura. Un rapido calcolo permette però di vedere che la frequenza delle oscillazioni

del ponte di Tacoma non era strettamente correlata con la velocità del vento, e quindi con la frequenza dei vortici da esso generati.

D'altra parte, un modello lineare presuppone che la struttura presenti *piccole oscillazioni*, mentre le oscillazioni del ponte di Tacoma, quel 7 novembre del 1940, erano evidentemente di grande ampiezza. Inoltre, la struttura stessa di un ponte sospeso è asimmetrica: le funi che lo sostengono agiscono da una sola parte del ponte, per cui una trazione verso il basso incontra una forza di richiamo elastica nel verso contrario, mentre un sollevamento del ponte verso l'alto potrebbe far allentare le funi, per cui non ci sarebbe alcuna forza di richiamo.

Viene allora spontanea una domanda: esiste una *risonanza nonlineare*? Come la si può definire?

Analizziamo un possibile modello di ponte sospeso, per quanto molto semplificato. Si tratta di un oscillatore in verticale, soggetto alla forza di gravità, sostenuto da una molla, con questa caratteristica: se lo si solleva al di sopra di un'altezza h , la molla si allenta e non esercita più alcuna forza. Misurando la posizione $u(t)$ verso il basso, avremo l'equazione differenziale

$$x'' + F(x) = e(t),$$

dove

$$F(x) = \begin{cases} \mu(x+h) - g & \text{se } x \geq -h, \\ -g & \text{se } x \leq -h. \end{cases}$$

Osserviamo che, per ragioni di continuità, deve essere $\mu h = g$, per cui l'equazione si può scrivere brevemente come

$$x'' + \mu [(x+h)^+ - h] = e(t). \quad (8)$$

Iniziamo a studiare le oscillazioni libere, quando cioè il termine forzante è nullo. Prendendo una soluzione con condizioni iniziali $x(0) = \alpha > 0$ e $x'(0) = 0$, si può vedere che essa è sempre periodica. Abbiamo due casi, a seconda che sia α minore o maggiore di h . Infatti, se $\alpha \leq h$, la soluzione rimane nella zona lineare, e il suo periodo è

$$\tau(\alpha) = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}.$$

Se invece $\alpha \geq h$, la soluzione esce dalla zona lineare, e si può calcolare che

$$\tau(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\mu}} \left[\arccos \left(-\frac{h}{\alpha} \right) + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{h} \right)^2 - 1} \right].$$

Si nota che il periodo $\tau(\alpha)$ è una funzione crescente di α , strettamente crescente se $\alpha \geq h$, e

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \tau(\alpha) = +\infty.$$

Come si può allora ancora parlare di *risonanza* in questo caso? Il problema è tuttora dibattuto tra gli esperti del settore.