

CORSO DI SISTEMI DINAMICI  
A.A. 2021/2022

5 novembre 2021

Homework 1

Modalità di consegna: invio a mezzo di posta elettronica di un documento in formato *pdf* e dell'eventuale codice Matlab agli indirizzi *parisini@units.it*, *fenu@units.it*. Il messaggio dovrà avere per oggetto: *[SD20212022] HW1 Nome Cognome*. In caso di lavori di gruppo, il documento dovrà riportare i nomi di tutti gli elementi del gruppo. In caso di invio di codice Matlab, esso potrà essere contenuto in una cartella compressa. Il documento *pdf* invece NON dovrà essere compresso (ad esempio, Allegato 1: *HW1 NomeCognomeRelazione.pdf*, Allegato 2: *HW1 NomeCognomeCodice.zip*).

Termine suggerito per la consegna: 21 dicembre 2021.

## Esercizio 1

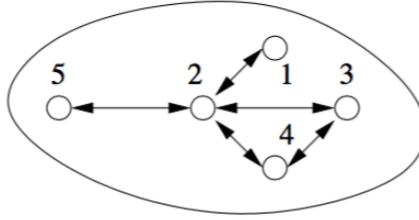


Figura 1: Esempio di grafo che rappresenta una rete di sensori.

**Consenso in rete di sensori.** Si consideri una rete di sensori, modellata attraverso un grafo (non orientato) i cui nodi corrispondono ai sensori stessi e gli archi all'esistenza di una comunicazione diretta fra due nodi. Si indichi con  $\mathcal{N}_i$  l'insieme dei vicini del nodo  $i$ . Per esempio, nella rete in Figura 1, si ha  $\mathcal{N}_2 = \{1, 3, 4, 5\}$  e  $\mathcal{N}_3 = \{2, 4\}$ . Sia  $x_i$  lo stato del sensore  $i$ esimo. Si vuole sfruttare la rete di sensori per calcolare la media di una certa grandezza. Più precisamente, si vuole fare in modo che, assegnato uno stato iniziale  $x(0) = [x_1(0) \ x_2(0) \ \dots \ x_n(0)]^\top$  in cui  $x_i(0)$  è posto uguale alla misura della grandezza effettuata dall' $i$ mo sensore, la rete di sensori converga asintoticamente ad uno stato  $\bar{x}$  tale che

$$\bar{x}_i = \alpha \doteq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j(0) \quad \forall i.$$

Per fare ciò si stabilisce la seguente regola *locale* di aggiornamento dello stato:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \gamma \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (x_j(k) - x_i(k)).$$

Si verifica immediatamente che tale regola può essere scritta come:

$$x(k+1) = x(k) - \gamma(D - A)x(k) = \underbrace{(I - \gamma(D - A))}_{\doteq W} x(k),$$

dove  $A$  è la matrice di adiacenza del grafo ( $a_{ij} = 1$  se il nodo  $i$  e il nodo  $j$  sono connessi, zero altrimenti) e  $D$  è una matrice diagonale tale che  $d_{ii}$  è pari al numero di nodi connessi al nodo  $i$ . La matrice  $D - A$  va sotto il nome di *Laplaciano* del grafo.

1. Si dimostri che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = [\alpha \ \dots \ \alpha]^\top \iff \lim_{k \rightarrow \infty} W^k = \frac{1}{n} \bar{1} \bar{1}^\top$$

dove  $\bar{1}$  è un vettore colonna di  $n$  elementi ciascuno dei quali pari a 1.

2. Si dimostri che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} W^k = \frac{1}{n} \bar{1} \bar{1}^\top$$

se e solo se valgono ambedue le seguenti condizioni

- (a)  $W$  ha uno e un solo autovalore pari ad uno e di molteplicità algebrica unitaria; gli altri autovalori sono tutti in modulo strettamente minori di uno.

- (b)  $W\bar{1} = \bar{1}$  (cioè  $\bar{1}$  è autovettore di  $W$  associato all'autovalore unitario).

**Suggerimento:** si ricordi che ogni matrice reale simmetrica ha autovalori tutti reali e può essere diagonalizzata per similitudine per mezzo di una matrice ortonormale, tale cioè che l'inversa coincide con la trasposta.

3. Si dimostri che se il grafo è connesso, allora si può sempre scegliere  $\gamma$  in modo che valgano le proprietà (a) e (b).

**Suggerimento:** ci si avvalga del fatto che il Laplaciano è semidefinito positivo e possiede un solo autovalore nullo se il grafo è connesso<sup>1</sup>.

4. Si scelga una struttura per la rete e un valore opportuno per  $\gamma$  e si svolga una simulazione al computer, tracciando un grafico dell'andamento di un transitorio convergente alla media degli stati iniziali.

---

<sup>1</sup>Si veda ad esempio Bojan Mohar, "The Laplacian spectrum of graphs," in *Graph Theory, Combinatorics, and Applications*, Vol. 2, Wiley, 1991, pagg. 871–898.

## Esercizio 2

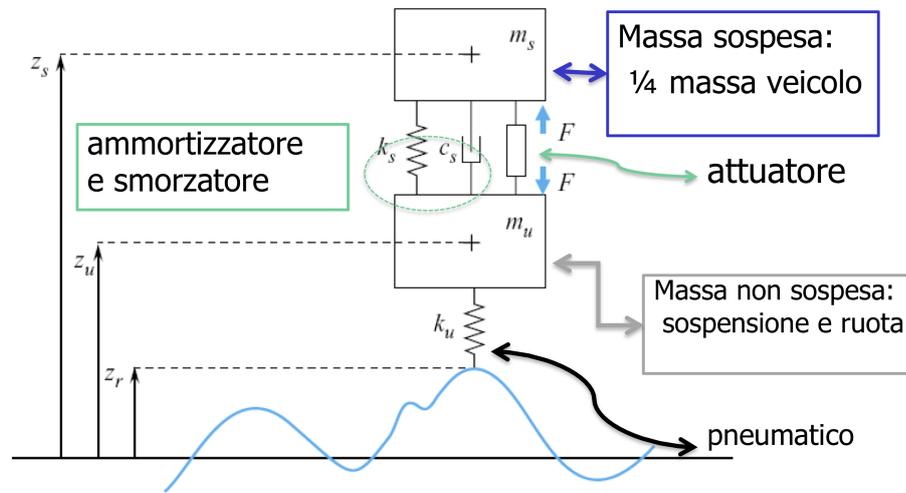


Figura 2: modello *quarter car*

**Modello *quarter car* e sospensioni semi-attive.** Facendo riferimento alla Figura 2,

1. si ricavi un modello dinamico a tempo continuo per il sistema, in forma di equazioni di stato, nelle condizioni di validità del modello *quarter car*<sup>2</sup>.
2. Facendo uso anche dei seguenti valori

$$\begin{aligned}
 m_s &= 400.0 \text{ kg} & m_u &= 50.0 \text{ kg} & c_s &= 2.0 \cdot 10^3 \text{ N s m}^{-1} \\
 k_s &= 2.0 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-1} & k_u &= 2.5 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-1}
 \end{aligned}$$

si discretizzi il modello a tempo continuo, utilizzando la tecnica di conversione “ad invarianza della risposta allo scalino”.

Facendo uso del modello a segnali campionati, si evidenzi graficamente come cambiano, al variare del periodo di campionamento, gli autovalori della matrice  $A$  delle equazioni di stato, quando si passi da valori molto piccoli per il periodo di campionamento a valori molto grandi, tali da provocare *aliasing*.

3. Simulare la risposta del sistema (sia a tempo continuo che a segnali campionati), nel caso in cui l’attuatore attivo non sia presente, il veicolo proceda in linea retta, a velocità costante ed incontri un dosso come quello raffigurato nella seguente figura 3.

<sup>2</sup>Si faccia riferimento alle pubblicazioni

- D. Hrovat, “Survey of Advanced Suspension Developments and Related Optimal Control Applications”, *Automatica*, Volume 33, Issue 10, October 1997, Pages 1781-1817
- C. Lauwerys, J. Swevers, P. Sas, “Robust linear control of an active suspension on a quarter car test-rig”, *Control Engineering Practice*, volume 13, n. 5, pag. 577-586, 2005

per una discussione sulle ipotesi del modello *quarter car* e per il ricavo del modello.

Per la simulazione si considerino due situazioni corrispondenti a due velocità di crociera differenti e pari rispettivamente a

$$v_{car1} = 15.0 \text{ km h}^{-1}$$

$$v_{car2} = 70.0 \text{ km h}^{-1}$$

**Suggerimento** Superare il dosso a velocità differenti significa che il segnale corrispondente alla variazione del profilo del suolo nel tempo sarà differente: lo spazio occupato dal dosso rimane costante, ma se la velocità di crociera del veicolo è differente, allora sarà diverso anche l'intervallo di tempo necessario a superare il dosso ...

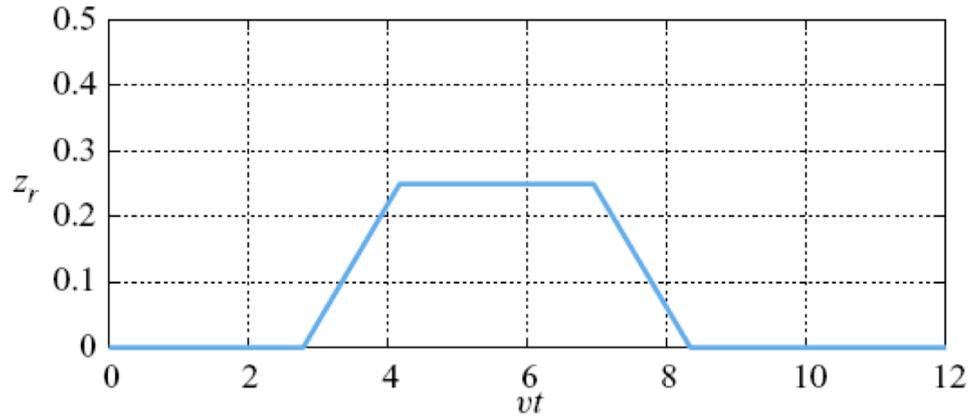


Figura 3: dosso stradale