Computabilità, Complessità e Logica

Lezione 13

Formule in CNF

- Letterale: una variabile o la sua negazione
  Esempio: x_i o $\neg x_i$
- Clausola: disgiunzione di letterali (negati o non negati).
  Esempio: $x_2 \vee \neg x_4 \vee x_5$
- Formula in CNF (**Conjunctive normal form** o **forma normale congiuntiva**): congiunzione di più clausole.
  Esempio: $(x_1 \vee x_3) \wedge (\neg x_2 \vee x_4 \vee \neg x_1)$

Formule in CNF

- Ogni formula può essere scritta in forma normale congiuntiva grazie a:
  - Leggi di De Morgan:
    $$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$$
    $$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$$
  - Eliminazione della doppia negazione: $\neg\neg a = a$
  - Proprietà distributiva:
    $$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
    $$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

Formule in CNF

- A causa della proprietà distributiva si potrebbe avere che la formula equivalente in CNF sia esponenzialmente più grande
- Possiamo però svolgere la costruzione nella dimostrazione del Teorema di Cook-Levin in CNF
- Abbiamo quindi che SAT limitato a formule in CNF è NP-completo
- Mostriamo ora che possiamo ridurre a 3 il numero di letterali in ognuna delle clausole

Da SAT a 3-SAT

- Assumiamo di avere una formula φ in CNF:
- La formula è formata m clausole $C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_m$
- E con n variabili $x_1, \ldots, x_n$
- Costruiamo una formula φ' in 3-CNF, ovvero dove ogni clausola ha **esattamente** tre letterali
- φ' potrà avere variabili aggiuntive rispetto a φ...
- ...ma sarà soddisfacibile se e solo se φ è soddisfacibile

Da SAT a 3-SAT

- Consideriamo una singola clausola C_i di φ.
- Indichiamo con $\ell_{1,i}, \ldots, \ell_{k,i}$ i letterali di C_i.
- Abbiamo quattro casi per la "forma" di C_i:
    - Singolo letterale: $C_i = \ell_{1,i}$
    - Due letterali: $C_i = \ell_{1,i} \vee \ell_{2,i}$
    - Tre letterali: $C_i = \ell_{1,i} \vee \ell_{2,i} \vee \ell_{3,i}$
    - Quattro o più letterali: $C_i = \ell_{1,i} \vee \ell_{2,i} \vee \ell_{3,i} \vee \ldots \vee \ell_{k,i}$

Da SAT a 3-SAT

- Se $C_i = \ell_{1,i} \vee \ell_{2,i} \vee \ell_{3,i}$ allora teniamo la clausola invariata, dato che consiste già di esattamente tre letterali

- Se $C_i = \ell_{1,i}$ allora introduciamo due variabili aggiuntive: $y_{1,i}$ e $y_{2,i}$

- Riscriviamo C_i come quattro clausole:

  $(\ell_{1,i} \vee \neg y_{1,i} \vee \neg y_{2,i}) \wedge (\ell_{1,i} \vee \neg y_{1,i} \vee y_{2,i})$

- $\wedge (\ell_{1,i} \vee y_{1,i} \vee \neg y_{2,i}) \wedge (\ell_{1,i} \vee y_{1,i} \vee y_{2,i})$

Da SAT a 3-SAT

- Se $C_i = \ell_{1,i} \vee \ell_{2,i}$ allora introduciamo una variabile aggiuntiva: $y_{1,i}$

- Riscriviamo C_i come due clausole:

  - $(\ell_{1,i} \vee \ell_{2,i} \vee \neg y_{1,i}) \wedge (\ell_{1,i} \vee \ell_{2,i} \vee y_{1,i})$

- Le clausole riscritte hanno più variabili…

- …ma il valore che queste assumono non è importante perché non cambiano la soddisfacibilità della formula

Da SAT a 3-SAT

- Se $C_i = \ell_{1,i} \vee \ell_{2,i} \vee \ell_{3,i} \vee \ldots \vee \ell_{k,i}$ allora introduciamo $k - 3$ variabili aggiuntive $y_{1,i}, \ldots, y_{k-3,i}$
- Riscriviamo C_i come una sequenza di clausole della forma:

$$(\ell_{1,i} \vee \ell_{2,i} \vee y_{1,i}) \wedge (\neg y_{1,i} \vee \ell_{3,i} \vee y_{2,i}) \wedge$$

$$(\neg y_{2,i} \vee \ell_{4,i} \vee y_{3,i}) \vee (\neg y_{3,i} \vee \ell_{5,i} \vee y_{4,i}) \wedge$$

$$\ldots \wedge (\neg y_{j-2,i} \vee \ell_{j,i} \vee y_{j-1,i}) \wedge \ldots$$

$$\ldots \wedge (\neg y_{k-3,i} \vee \ell_{k-1,i} \vee \ell_{k,i})$$

Da SAT a 3-SAT

- La formula ottenuta è solo polinomialmente più grande rispetto alla formula originale:
  - Dato che la clausola già lunga può contenere al più n letterali, al massimo ogni clausola è riscritta in $n - 3$ clausole di esattamente tre letterali
  - Al massimo aggiungiamo $n - 3$ nuove variabili per clausola
  - La costruzione è fattibile in tempo polinomiale
- Abbiamo quindi $\mathrm{SAT} \leq_P 3 - \mathrm{SAT}$
  quindi 3-SAT è NP-completo