

*Capitolo IV.*

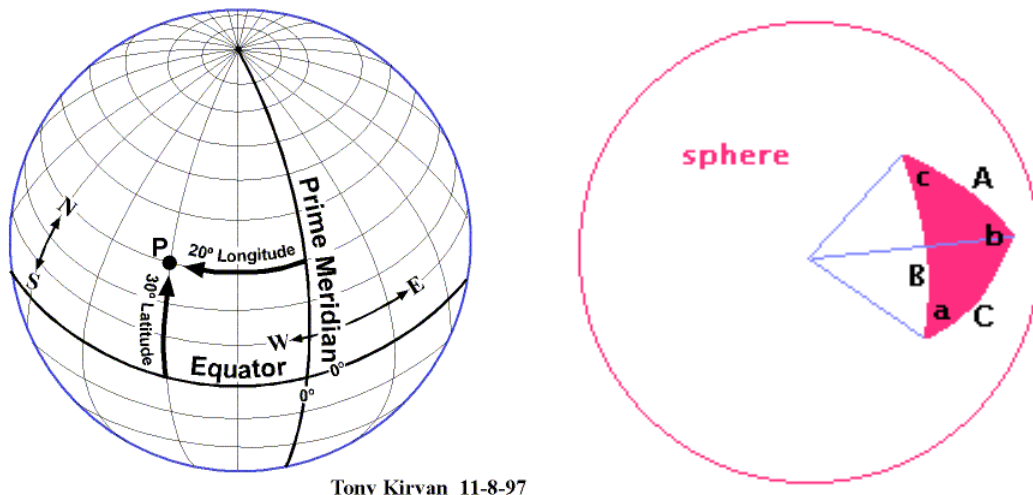
**GEOMETRIA  
DI UNA MISSIONE SPAZIALE**

## IV.1. Geometria della sfera celeste

### IV.1.1. Sfera celeste, sistemi di coordinate

La sfera celeste è una sfera immaginaria di raggio unitario centrato sull' osservatore. In Figura IV.1.1 si dà un'illustrazione di come si utilizza la sfera celeste per rappresentare la direzione di oggetti nello spazio; l'osservatore è al centro della sfera.

Un "cerchio massimo" sulla sfera celeste è ogni cerchio che divide la sfera in due emisferi uguali. Dati tre punti in cielo, possiamo unirli con segmenti di arco di cerchio massimo ( $A, B, C$ ) (talvolta  $\psi, \beta, \eta$ ) per costruire un triangolo sferico. Il cerchio massimo ha al centro l'osservatore. Gli angoli ( $a, b, c$ ) (talvolta  $\Lambda, \Sigma, \Phi$ ) sono i vertici del triangolo sferico e sono chiamati "angoli di rotazione". Gli angoli di rotazione sono compresi fra piani individuati da due cerchi massimi.



Tony Kirvan 11-8-97

**Figura IV.1.1:** Sistema di coordinate sferiche e rappresentazione di direzioni nello spazio. I lati dei triangoli sferici sono lunghezze d'arco; gli angoli sono angoli di rotazione.

Nel sistema di coordinate sferiche di Figura IV.1.1 si definiscono "poli" e "punto di riferimento" sull'equatore. I cerchi massimi che passano per i poli sono i "meridiani"; il meridiano che passa per un punto della sfera determina la coordinata di "azimuth" del punto. Azimuth è l'angolo di rotazione misurato, lungo l'equatore, in senso antiorario, dal punto di riferimento fino al punto in questione. Nel sistema di riferimento della Terra l'azimuth è la longitudine,  $l$ . La seconda coordinata che determina la posizione di un punto sulla sfera celeste è la coordinata di "elevazione" (latitudine,  $\lambda$ , se ci riferiamo alla Terra). E' l'arco misurato sopra o sotto l'equatore lungo un cerchio massimo. I cerchi di elevazione costante sono i paralleli.

Le equazioni che trasformano le coordinate di azimuth ( $l$ ) ed elevazione ( $\lambda$ ) di un punto in coordinate cartesiane dello stesso sono:

$$\begin{aligned}x &= \cos l \cos \lambda \\y &= \sin l \cos \lambda \\z &= \sin \lambda\end{aligned}\tag{IV.1}$$

Per determinare la posizione ed il moto apparente degli oggetti visti da un satellite, si usa quella che è chiamata geometria direzionale. Gli ingredienti necessari per tale geometria sono i versori e la sfera celeste. Bisogna preliminarmente fissare un sistema di coordinate e sceglierlo opportunamente in modo da definire correttamente il problema e ridurre la possibilità d'errore. Un sistema di coordinate per applicazioni nello spazio è definito 1) dalla posizione del centro, e 2) dal sistema di riferimento rispetto a cui il sistema di coordinate è fisso.

Di solito si sceglie il centro della Terra come centro del sistema di coordinate quando si devono risolvere problemi che si riferiscono alla superficie della Terra; si sceglie il satellite quando si tratta di problemi connessi alla posizione ed il moto apparente degli oggetti visto dal satellite stesso. In altre situazioni il sistema di coordinate è centrato su uno strumento scientifico (ad esempio, quando si vogliono definire posizioni di componenti del satellite che ne occultano il campo di vista).

Il sistema di coordinate viene riferito di solito ad un sistema di riferimento inerziale. Altre possibilità sono: la direzione della Terra, il satellite stesso, etc. Di seguito si dà una descrizione schematica di alcuni sistemi di coordinate.

☞ *Sistema di coordinate celeste e inerziale*: il centro è la Terra (sistema geocentrico-inerziale) o il satellite, il sistema è "fisso" rispetto allo spazio inerziale, l'asse z è il polo celeste, l'asse x è il punto  $\gamma$ . La coordinata di azimuth si chiama ascensione retta ed è indicata con la lettera  $\alpha$ ; la coordinata di elevazione si chiama declinazione ed è indicata con la lettera  $\delta$ .

☞ *Applicazioni*: analisi delle orbite, astronomia, studio di moti inerziali.

☞ *Sistema di coordinate fisso sulla Terra (geocentrico)*: il centro è la Terra, rispetto cui è fisso, l'asse z è il polo celeste, l'asse x è il meridiano di Greenwich. Le coordinate sono la latitudine e la longitudine.

☞ *Applicazioni*: misure di posizioni sulla Terra, moto apparente dei satelliti.

☞ *Sistema LVLH (Local Vertical/Local Horizontal)*: il centro è il satellite, il sistema è fisso rispetto l'orbita, l'asse y è diretto nel senso della perpendicolare negativa dell'orbita (asse di beccheggio o di "pitch"), l'asse z è il nadir (asse di imbardata o di "yaw"), l'asse x è diretto nel senso del moto del satellite (asse di rollio o di "roll").

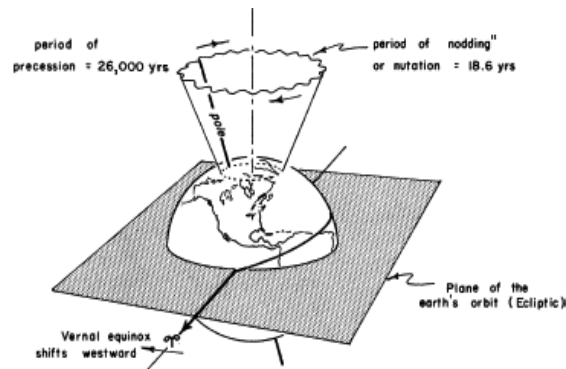
☞ *Applicazioni*: osservazioni della Terra, manovre d'assetto.

☞ *Sistema di coordinate eclittiche*: Il centro è il Sole, il sistema è fisso rispetto lo spazio inerziale, l'asse z è il polo dell'eclittica, l'asse x è il punto  $\gamma$ . Si ricorda che il piano dell'eclittica è il piano dell'orbita terrestre nel suo moto attorno il Sole. Inoltre, la direzione degli equinozi (il punto  $\gamma$  è in direzione dell'equinozio di primavera) è data dalla linea di intersezione del piano dell'eclittica con il piano dell'equatore.

☞ *Applicazioni*: determinazione di orbite del sistema solare e di efemeridi del Sole e della Luna.

Da notare che il sistema di coordinate celesti (inerziale) non è fisso relativamente alle stelle fisse. L'asse di rotazione terrestre (e quindi la direzione del punto  $\gamma$ ) ha un moto di precessione del polo dell'orbita della Terra attorno il Sole (Figura IV.1.2). Il moto di precessione è dovuto al momento della forza esercitata dal Sole causa l'asfericità della Terra.

Poichè l'equatore terrestre è inclinato di  $23.5^\circ$  rispetto il piano dell'eclittica, l'asse polare descrive una superficie conica nello spazio di apertura angolare  $23.5^\circ$ . Il periodo del moto è di 26000 anni, il che significa uno spostamento rispetto le stelle fisse di  $0.014^\circ$  (50 secondi d'arco) per anno. Le coordinate celesti richiedono perciò di essere riferite ad una data per definire accuratamente la posizione del punto  $\gamma$ . Di solito si usano le coordinate all'anno 1950.0 o 2000.0.



**50.2786" westerly drift of the Vernal Equinox per year**

Figura IV.1.2: Precessione degli equinozi.

Sovrapposto al moto di precessione c'è anche un moto di nutazione, dovuto alla Luna, che ha un periodo di circa 18.6 anni.

#### IV.1.2. Studio di eclissi da una LEO

Supponiamo di avere un satellite su un'orbita LEO circolare di altezza  $h = 1000$  km ed  $i = 32^\circ$ . Si vuole studiare il problema degli eclissi solari definendo tre viste differenti della geometria del satellite. In Figura IV.1.3.A si dà la geometria "normale": coordinate cartesiane centrate sulla Terra e vettori in direzione del satellite e del Sole. In Figura IV.1.3.B sono rappresentati la sfera celeste centrata sul satellite ed un riferimento inerziale. In figura sono indicati: 1) equatore celeste, 2) piano e polo dell'orbita e 3) eclittica. I cerchi tratteggiati mostrano il disco della Terra visto dal satellite durante il movimento del centro della Terra relativamente al satellite. In questa rappresentazione, si avrà eclisse solare ogni volta che il Sole è situato entro il disco della Terra. Ogni altro oggetto celeste situato entro il disco della Terra è anche eclissato. Il cerchio centrato sul polo dell'orbita è sempre tangente al disco della Terra. Ogni oggetto entro quel cerchio non viene mai eclissato.

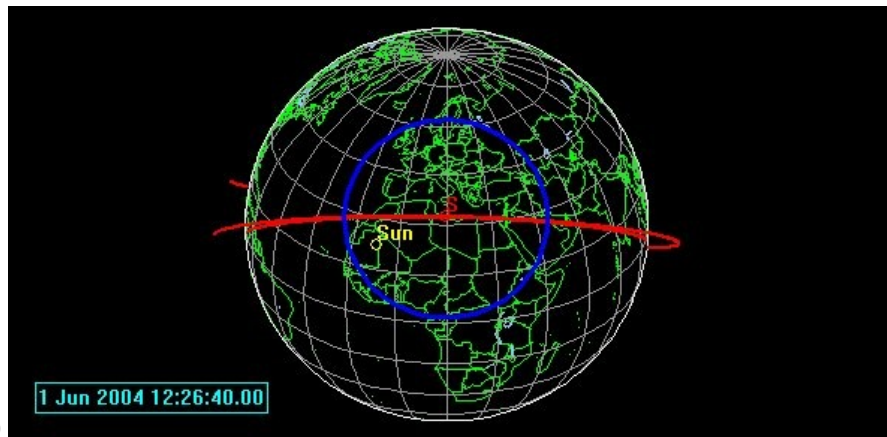
In Figura IV.1.3.C si ha ancora la sfera celeste centrata sul satellite ma in questo caso l'asse  $z$  del satellite è tenuto fisso in direzione della Terra (assetto LVLH). Poichè l'asse  $z$  vede sempre la Terra, il polo dell'orbita si sposta ad ogni orbita nello spazio inerziale. Ciò significa che corpi celesti fissi o quasi fissi nello spazio inerziale

ruotano anch'essi attorno il polo orbitale. Per il Sole si ha eclisse ogni volta che la traiettoria del Sole entra nel disco della Terra. Dalla Figura IV.1.3.C si possono derivare le seguenti considerazioni:

1. durante ogni orbita il Sole si muove lungo un cerchio e la zona dell'eclisse è una frazione del cerchio;
2. supponiamo che l'eclisse copra  $113^\circ$  in azimuth, cioè il 31.39% dell'orbita; la durata dell'eclissi è di 33 minuti per un satellite a 1000 km su un'orbita circolare (il periodo è 105 minuti);
3. poichè il Sole si muove lungo l'eclittica, il cerchio che descrive si muoverà fra  $-55.5^\circ$  e  $+55.5^\circ$  (il valore di  $55.5^\circ$  si ottiene sommando il valore dell'inclinazione dell'orbita,  $32^\circ$ , con l'angolo fra l'eclittica ed il piano equatoriale,  $23.5^\circ$ );
4. si ha la massima durata dell'eclisse quando il Sole è sul piano dell'orbita, ed il minimo quando il Sole è al massimo e al minimo angolare del suo moto annuo.

In Figura IV.1.3.D si mostra come si possano derivare relazioni fra  $\rho$ , il raggio angolare della Terra vista dal satellite, l'angolo  $\beta$  fra il Sole ed il satellite, e l'angolo di rotazione  $\phi$  che rappresenta la durata dell'eclisse. Usando la trigonometria sferica si ottiene:

$$\cos \frac{\phi}{2} = \frac{\cos \rho}{\cos \beta_s} \quad (\text{IV.2})$$



(vedi fotocopia)

Copyright: [www.agi.com/products/stk](http://www.agi.com/products/stk)

Figura IV.1.3 (A, B, C, D): Geometria di un satellite in un'orbita di 1000 km con inclinazione di  $32^\circ$ .

### IV.1.3 Angolo $\beta$

La determinazione dell'angolo fra il Sole e satellite permette di analizzare gli effetti termici sulle varie facce del satellite e verificare le possibili interferenze della luce solare con gli strumenti ottici.

Si prende un sistema di coordinate solidale con il satellite e riferito alla Terra (LVLH). In questo sistema di coordinate, la normale ad una data faccia del satellite intercetta la sfera celeste in un punto F (Figura IV.1.4). F rimane fisso nelle coordinate del satellite così come è fissa la direzione del nadir e del polo dell'orbita. Ad ogni orbita, il Sole si muove all'interno di un cerchio di raggio

$$\beta_S = \frac{\pi}{2} - \beta_S \quad (IV.3)$$

dove  $\beta_S$  è l'angolo fra il centro del satellite ed il Sole. Si definiscono i seguenti altri angoli:  $\beta$ , l'angolo fra F ed il Sole,  $\beta_F$  l'angolo complementare all'angolo  $\beta_F$  fra F e la normale all'orbita. Se  $I$  è la potenza (in watt) incidente sulla faccia F di area  $A$ ,  $G_S$  è la costante solare in vicinanza della Terra ( $G_S = 1368 \text{ W/m}^2$ ), si ha

$$I = AG_S \cos \beta \quad (IV.4)$$

$$\cos \beta = \text{sen} \beta_F \text{sen} \beta_S + \cos \beta_F \cos \beta_S \cos \Delta(az) \quad (IV.4)$$

dove

$$\begin{aligned} \beta_{\max} &= \beta_F + \beta_S \\ \beta_{\min} &= |\beta_F - \beta_S| \end{aligned} \quad (IV.5)$$

Le equazioni precedenti valgono sia per orbite circolari che ellittiche. Se un'orbita è circolare con periodo  $\tau$  e frequenza  $\omega = 2\pi/\tau$ , si può determinare l'energia totale (in joule) incidente sulla faccia F del satellite durante il suo moto da un azimuth  $az_1$  ad  $az_2$  integrando l'espressione IV.4:

$$E = \frac{AG_S \tau}{2\pi} [(az_2 - az_1) \text{sen} \beta_F \text{sen} \beta_S + (\text{sen} az_2 - \text{sen} az_1) \cos \beta_F \cos \beta_S] \quad (IV.6)$$

Durante un'orbita il Sole illuminerà F eccetto che in due periodi:

1. durante l'eclisse,
2. quando  $\beta > 90^\circ$ , cioè quando il Sole "vede" la parte posteriore di F.

Le condizioni per l'eclisse sono date dall'equazione che segue dove con  $az_0$  è indicato l'azimuth del nadir relativamente a F

$$az_{eclisse} = az_0 \pm \cos^{-1} \left( \frac{\cos \rho}{\cos \beta_S} \right) \quad (IV.7)$$

Affinchè si verifichi la condizione 2. si usa l'espressione nel coseno della IV.4:

$$az_{dietro} = \pm \cos^{-1}(-\tan \beta_F \tan \beta_S) \quad (IV.8)$$

Si prenda ad esempio un satellite che orbita a 1000 km d'altezza con  $i = 32^\circ$  (il periodo  $\tau$  è di circa 105 minuti e la frequenza  $\omega$  di 0.001 rad/s). Si assuma

1.  $\beta_S = 35^\circ, \rho = 60^\circ$ ;
2. che la faccia  $F$  del satellite abbia un'area di  $0.5 \text{ m}^2$  e che il suo vettore normale formi un angolo  $az_0 = 75^\circ$  dal nadir e un'angolo  $\beta_F = 35^\circ$  (elevazione) dal piano dell'orbita.

Dalle equazioni IV.1.7 e IV.1.8 si ottengono i limiti di azimuth per l'eclisse ( $18.5^\circ \leq az_{eclisse} \leq 131.5^\circ$ ) ed i limiti di azimuth per l'illuminazione posteriore ( $109^\circ \leq az_{dietro} \leq 251^\circ$ ). Si ha quindi energia solare incidente solo per azimuth compresi fra  $18.5^\circ$  e  $251^\circ$ . Dalla IV.1.6 si ricava che il valore di  $E$  è di circa un milione di joules, cioè di 0.28 kilowatt-ora.

(vedi fotocopie)

**Figura IV.1.4:** Calcolo dell'angolo  $\beta$ .

#### IV.1.4. Geometria della terra vista dallo spazio

Si vuole determinare il raggio angolare  $\rho$  dell'area della Terra vista da un satellite (cioè il raggio del cerchio formato dalla Terra nel "cielo" del satellite) ed il raggio angolare  $\lambda_0$  della stessa area sottesa dal centro della Terra, supposta sferica (Figura IV.1.5).

La relazione che lega i due angoli è data da

$$\text{sen} \rho = \cos \lambda_0 = \frac{R_T}{R_T + h} \quad (IV.9)$$

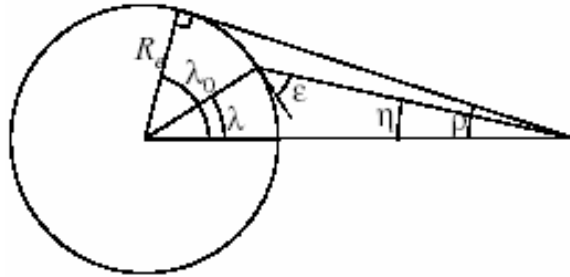
dove  $R_T$  è il raggio della Terra,  $h$  è l'altezza dell'orbita e  $\rho + \lambda_0 = 90^\circ$ .

Dalla Figura IV.1.5 si vede anche che la distanza del satellite dall'orizzonte

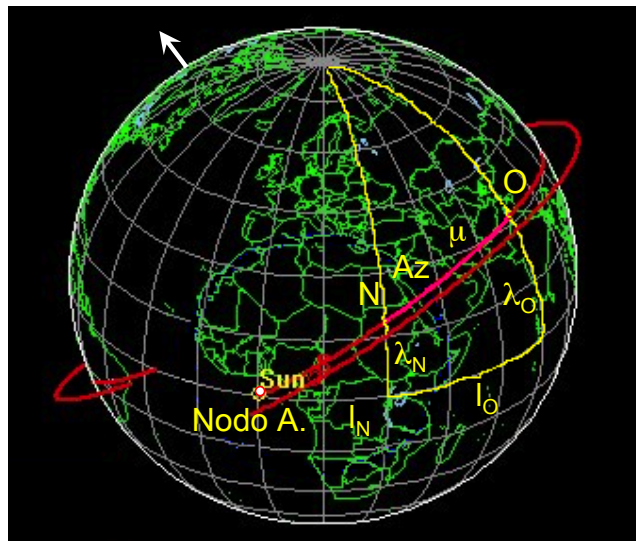
$$d^2 = (R_T + h)^2 - R_T^2 = R_T^2 \tan^2 \lambda_0 \quad (IV.10)$$

L'approssimazione di Terra sferica è adeguata per la maggior parte degli studi di geometria di missione. Tuttavia se si vuole maggior precisione bisogna applicare opportune correzioni per la non sfericità. In questa analisi consideriamo la Terra perfettamente sferica.

Si determina la relazione angolare fra un località  $O$  sulla Terra (ad esempio, la località dove è situata la stazione a terra) ed il punto di sub-satellite  $N$ , cioè l'intersezione della linea di nadir del satellite con la superficie terrestre. In particolare si vogliono calcolare le coordinate di  $O$  viste dal satellite quando sono date le coordinate sulla Terra. La situazione geometrica è rappresentata in Figura IV.1.6.



**Figura IV.1.5:** Definizione delle relazioni angolari fra satellite, centro della Terra ed una stazione a terra.



Copyright: [www.agi.com/products/stk](http://www.agi.com/products/stk)

**Figura IV.1.6:** Relazione fra posizione della stazione a terra  $O$  e del punto sub-satellite  $N$  sulla superficie della Terra.

Si indichino con  $l$  e  $\lambda$  le longitudini e latitudini terrestri. Le coordinate dei vari punti descritti sono:  $N(l_N, \lambda_N)$  e  $O(l_O, \lambda_O)$ ; sia inoltre  $\Delta l = |l_N - l_O|$ . Si vogliono determinare le coordinate  $az$  e  $\mu$  della stazione a terra viste dal satellite (Figura IV.1.6). Le equazioni che le determinano si derivano direttamente dalle leggi della trigonometria sferica e sono:

$$\cos \mu = \text{sen} \lambda_N \text{sen} \lambda_O + \cos \lambda_N \cos \lambda_O \cos \Delta l, \lambda \leq 180^\circ$$

(IV.11)

$$\cos az = \frac{\text{sen} \lambda_O - \cos \mu \text{sen} \lambda_N}{\text{sen} \mu \cos \lambda_N}$$

dove  $az$  è minore di  $180^\circ$  se  $O$  è ad est di  $N$  ed è maggiore di  $180^\circ$  nel caso contrario.

Analogamente, dati  $N(l_N, \lambda_N)$  e  $O(az, \mu)$  si possono calcolare le coordinate geografiche di  $O$ . Si noti che, per la trasformazione da coordinate terrestri a coordinate viste dal satellite bisogna



1. considerare che  $az$  è lo stesso sia visto da Terra che dal satellite (è una misura di angolo di rotazione fra due piani formanti due cerchi massimi), e
2. determinare l'angolo di nadir,  $\eta$ , misurato dal satellite dal punto  $N$  al punto  $O$ .

Si definisce  $\varepsilon$  l'angolo di elevazione del satellite visto da  $O$ . Dalla Figura IV.1.5 si vede che:

$$\eta + \lambda + \varepsilon = 90^\circ$$

$$D = R_T \frac{\text{sen}\lambda}{\text{sen}\eta} \quad (\text{IV.12})$$

dove  $D$  è la distanza fra satellite e stazione a terra. Inoltre risultano le seguenti relazioni:

$\lambda$  noto, si deriva  $\eta$

$$\tan \eta = \frac{\text{sen}\rho \text{sen}\lambda}{1 - \text{sen}\rho \cos \lambda} \quad (\text{IV.13})$$

$\eta$  noto, si deriva  $\varepsilon$

$$\cos \varepsilon = \frac{\text{sen}\eta}{\text{sen}\rho} \quad (\text{IV.14})$$

$\varepsilon$  noto, si deriva  $\eta$

$$\text{sen}\eta = \cos \varepsilon \text{sen}\rho \quad (\text{IV.15})$$

Si consideri, come esempio, un satellite orbitante ad un'altezza di 1000 km; si assuma una stazione a Terra alle Hawaii ( $l_0 = 200^\circ, \lambda_0 = 22^\circ$ ); si assumano le seguenti coordinate del punto  $N$ : ( $l_N = 185^\circ, \lambda_N = 10^\circ$ ).

Dall'equazione IV.9 e dalla complementarità di  $\rho$  e  $\lambda_0$  si trova che il raggio angolare della Terra è  $\rho = 59.8^\circ$  e che l'orizzonte è a  $\lambda_0 = 30.2^\circ$  e ad una distanza di 3309 km dal punto  $N$ . Dalle equazioni IV.11 si trova che  $O$  è ad una distanza  $\lambda = 18.7^\circ$  da  $N$  ed ha un azimuth relativo al nord di  $48.3^\circ$ . Dal punto di vista del satellite  $\eta = 58.6^\circ$  e  $D = 2444$  km. L'elevazione del satellite, vista da  $O$ , è  $\varepsilon = 14.5^\circ$ . Si noti che  $\eta$  e  $\rho$  sono molto vicini:  $58.6^\circ$  e  $59.8^\circ$ . Viceversa  $\mu$ , la distanza angolare della stazione a terra da  $N$ , e  $\lambda_0$  sono circa l'uno la metà dell'altro:  $18.7^\circ$  e  $30.2^\circ$  rispettivamente. Questo è l'effetto di proiezione: le distanze viste dal satellite, al di là di un certo raggio angolare, sono compresse.

In Figura IV.1.7 si dà una rappresentazione geometrica del campo di vista di un satellite orbitante ad un'altezza di 1000 km sopra l'equatore ad un longitudine di  $70^\circ$  ovest. La rappresentazione è fatta su un sistema di coordinate centrato sul satellite; il satellite vede la sfera celeste ed una porzione di disco della Terra. Si noti la fortissima

distorsione delle caratteristiche geografiche (il satellite vede parte dell'America Centrale e dell'America del Sud) dei paralleli e dei meridiani.

**Figura IV.1.7:** Distorsione delle caratteristiche geografiche da un satellite da 1000 km di altezza; il sistema di coordinate è centrato sul satellite che "vede" la sfera celeste ed il disco della Terra.

Si vuole adesso analizzare brevemente la proiezione della traiettoria di un satellite sulla superficie terrestre, cioè la "ground track" (GT). Localmente la GT è "quasi" un cerchio massimo; è la traiettoria della proiezione del nadir del satellite sulla superficie terrestre. Il "quasi" deriva dal fatto che, a causa della rotazione terrestre, la GT è una spirale con uno spostamento (all'equatore) proporzionale al periodo dell'orbita (Figura IV.1.8). Per un satellite in un'orbita circolare di inclinazione  $i$ , la latitudine  $\lambda_N$  e longitudine  $l_N$  del nadir, relativamente al nodo ascendente, sono rispettivamente:

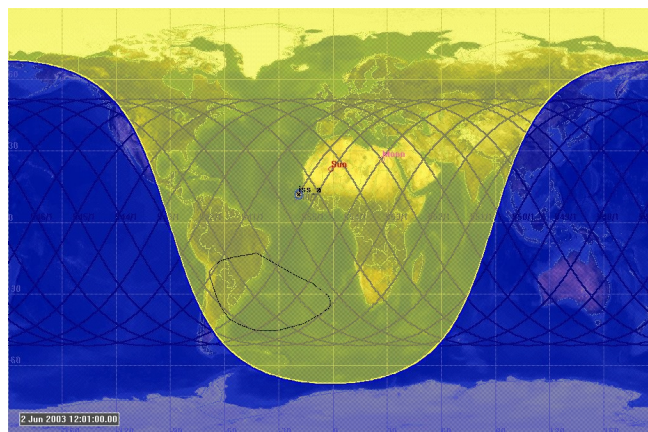
$$\begin{aligned} \sin \lambda_N &= \sin i \sin \omega t \\ \tan(l_N + \omega_T t) &= \cos i \tan \omega t \end{aligned} \tag{IV.16}$$

dove  $\omega_T = 0.004178$  gradi/s è la velocità di rotazione della Terra attorno il suo asse e  $\omega$  è la velocità angolare del satellite e  $t$  è il tempo misurato dall'istante in cui il satellite passa per il nodo ascendente.

Per un satellite in un'orbita circolare,  $\omega$  (gradi/s) è legata al periodo  $\tau$  (minuti) dalla

$$\omega = \frac{6}{\tau} \leq 0.071 \tag{IV.17}$$

dove 0.071 gradi/s è la velocità angolare massima di un satellite in orbita circolare.



Copyright: [www.agi.com/products/stk](http://www.agi.com/products/stk)

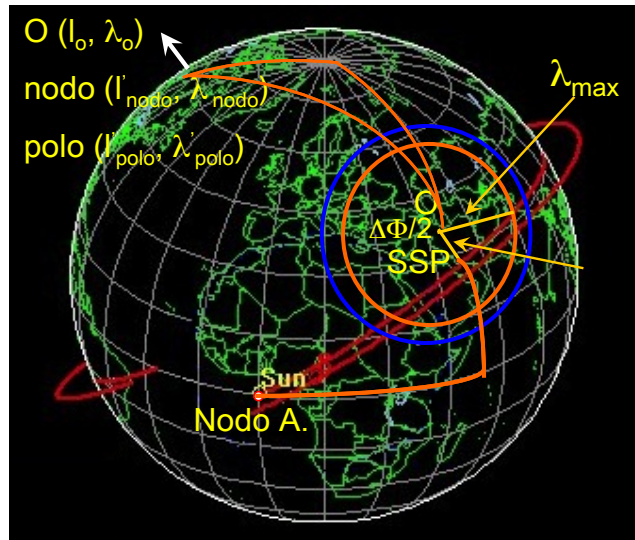
**Figura IV.1.8:** GT di un satellite.

#### IV.1.5. Moto apparente di un satellite per un osservatore sulla Terra

Anche per satelliti che hanno un'orbita perfettamente circolare, il moto apparente (da Terra) di un satellite è molto complesso. Se l'osservatore è nel piano orbitale, il moto apparente del satellite sarà un cerchio massimo che passa per lo zenith dell'osservatore. Se l'osservatore è leggermente fuori dal piano orbitale, l'orbita apparente sarà un cerchio nello spazio visto da fuori il piano del cerchio e proiettato nella sfera celeste dell'osservatore. In generale le traiettorie dei satelliti sono molto complicate e per ottenerle si usano programmi di simulazione STK (Satellite Tool Kit, [www.stk.com](http://www.stk.com)). Questi programmi includono anche i casi di orbite ellittiche.

Il caso che trattiamo brevemente in questa sezione è per un satellite in una LEO circolare. Nella sezione che segue discuteremo alcune caratteristiche delle orbite apparenti dei satelliti in orbita geosincrona equatoriale (GEO).

Nel caso di una LEO si suppone che nel periodo in cui il satellite passa sopra una stazione a terra con un'orbita bassa si possano trascurare gli effetti della rotazione. La geometria è rappresentata in Figura IV.1.9.



Copyright: [www.agi.com/products/stk](http://www.agi.com/products/stk)

**Figura IV.1.9:** Geometria della "ground track" di un satellite relativamente ad un osservatore sulla superficie della Terra.

L'area del cerchio centrato in  $O$  (la stazione a terra) rappresenta tutti i punti del sub-satellite in cui l'elevazione del satellite è vista sotto un angolo  $\epsilon > \epsilon_{\min}$ , dove  $\epsilon_{\min}$  è un valore prefissato. Per un satellite che deve trasmettere alla stazione a terra, un valore ottimale è  $\epsilon_{\min} = 5^\circ$ .

Il cerchio tratteggiato rappresenta il luogo dei punti per cui il satellite è all'orizzonte,  $\epsilon = 0^\circ$ . Una volta fissato il valore di  $\epsilon_{\min}$  si calcolano  $\lambda_{\max}$ ,  $\eta_{\max}$  e  $D_{\max}$  per i quali valgono le seguenti relazioni:

$$\text{sen} \eta_{\max} = \text{sen} \rho \cos \epsilon_{\min}$$

$$\lambda_{\max} = 90^\circ - \epsilon_{\min} - \eta_{\max} \tag{IV.17}$$

$$R_T \text{sen} \lambda_{\max} = D_{\max} \text{sen} \eta_{\max}$$

Il cerchio di raggio  $\lambda_{\max}$  centrato in  $O$  e definito dalla condizione di  $\epsilon_{\min}$  è l'orizzonte effettivo; quello tratteggiato,  $\epsilon = 0^\circ$ , è l'orizzonte vero.

Sia  $l_{\text{nodo}}$  la longitudine del nodo ascendente definita rispetto la superficie della Terra.  $l_{\text{nodo}}$  aumenta di 360 gradi ogni 1436 minuti. Questo è il valore del periodo di rotazione della Terra rispetto le stelle (non considerando le perturbazioni dell'orbita che influiscono sul periodo). La caratteristica di moto solidale con la Terra permette di definire un nodo ascendente istantaneo quello che è calcolato all'istante del passaggio di un satellite sopra una stazione a terra; si indichi la sua longitudine con  $l'_{\text{nodo}}$ . Analogamente si definisce un polo dell'orbita istantaneo che ha coordinate istantanee:

$$\begin{aligned}\lambda'_{\text{polo}} &= 90^\circ - i \\ l'_{\text{polo}} &= l'_{\text{nodo}} - 90^\circ\end{aligned}\tag{IV.18}$$

Un satellite passerà sopra la stazione a terra se e solo se

$$\text{sen}(l_0 - l'_{\text{nodo}}) = \frac{\tan \lambda_0}{\tan i}\tag{IV.19}$$

dove  $l_0$  e  $\lambda_0$  sono la longitudine e la latitudine della stazione a terra rispettivamente.

L'equazione precedente ha due soluzioni valide che corrispondono al passaggio del satellite sopra una stazione a terra situata nella parte nord dell'orbita e sopra una stazione situata nella parte sud. Per determinare quando, dopo il passaggio all'equatore, il satellite passa sopra la stazione a terra (si suppone sempre un'orbita circolare), si determina l'angolo  $\mu$  fra il nodo ascendente e la stazione (misurato dal centro della Terra):

$$\text{sen } \mu = \frac{\text{sen } \lambda_0}{\text{sen } i}\tag{IV.20}$$

Anche in questo caso si hanno due soluzioni valide che corrispondono a passaggi al nord e sud dell'orbita rispettivamente.

La Figura IV.1.9 definisce i parametri del passaggio del satellite sopra la stazione in termini di  $\lambda_{\min}$  ( $\lambda_{\min}$  è  $90^\circ$  meno la distanza angolare misurata al centro della Terra fra la stazione a terra ed il polo istantaneo dell'orbita all'istante del contatto). Dati i valori di latitudine del polo dell'orbita e della stazione a terra, si deriva la seguente relazione:

$$\text{sen } \lambda_{\min} = \text{sen } \lambda_{\text{polo}} \text{sen } \lambda_0 + \cos \lambda_{\text{polo}} \cos \lambda_0 \cos \Delta l\tag{IV.21}$$

dove  $\Delta l$  è la differenza in longitudine fra la stazione ed il polo dell'orbita. Al punto di minima distanza si calcolano i valori di  $\eta_{\min}$ , l'angolo di nadir minimo,  $\epsilon_{\max}$ , l'angolo di elevazione massimo, ed la minima distanza dell'orizzonte,  $D_{\min}$ :

$$\tan \eta_{\min} = \frac{\text{sen} \rho \text{sen} \lambda_{\min}}{1 - \text{sen} \rho \cos \lambda_{\min}}$$

$$\varepsilon_{\max} = 90^\circ - \lambda_{\min} - \eta_{\min} \quad (\text{IV.22})$$

$$R_T \text{sen} \lambda_{\min} = D_{\min} \text{sen} \eta_{\min}$$

Nel punto di contatto più vicino, il satellite si muove perpendicolarmente alla linea visuale dalla stazione a terra con velocità angolare massima data da

$$\dot{\vartheta}_{\max} = \frac{v_{\text{sat}}}{D_{\min}} = \frac{2\pi(R_T + h)}{\tau D_{\min}} \quad (\text{IV.23})$$

**Figura IV.1.10:** Moto di un satellite ad un'altezza di 1000 km visto da un osservatore alla superficie della Terra.

Infine è utile calcolare l'intervallo totale di azimuth coperto dal satellite visto dalla stazione a terra ed il tempo totale di vista:

$$\cos \frac{\Delta\phi}{2} = \frac{\tan \lambda_{\min}}{\tan \lambda_{\max}} \quad (\text{IV.24})$$

$$T = \frac{\tau}{180^\circ} \cos^{-1} \frac{\cos \lambda_{\max}}{\cos \lambda_{\min}}$$

In Figura IV.1.10 si danno esempi di GT per un satellite che ha i seguenti parametri orbitali:  $h=1000$  km,  $\tau=105$  min,  $\rho=58.9^\circ$ ,  $i=28.5^\circ$ ,  $\lambda_{\text{polo}}=61.5^\circ$ ,  $l_{\text{polo}}=100^\circ$ . La stazione a terra è alle Hawaii ( $\lambda_0=22^\circ$ ,  $l_0=100^\circ$ ). Se si assume che la minima elevazione osservabile è  $\varepsilon_{\min}=5^\circ$ , si trova che  $\eta_{\max}=59.4^\circ$ ,  $\lambda_{\max}=25.6^\circ$ ,  $D_{\max}=3202$  km. Inoltre l'equazione IV.1.20 dà  $\lambda_{\min}=14.7^\circ$  e quindi  $\eta_{\min}=53.2^\circ$ ,  $\varepsilon_{\max}=22.1^\circ$  e  $D_{\min}=2021$  km,  $\dot{\vartheta}=12.6^\circ$ ,  $\Delta\phi=113.6^\circ$ , e  $\tau=12.36$  minuti.

#### IV.1.6. Satelliti in orbita geosincrona

In questa sezione si analizza brevemente il moto giornaliero apparente di satelliti in orbita geosincrona situati sopra una data zona equatoriale.

L'altezza dell'orbita è 35786 km per un periodo di rotazione di 1436 minuti, cioè il periodo siderale della rotazione della Terra. Si assume, per comodità, che l'osservatore è al centro della Terra. La descrizione del moto visto da un osservatore sulla superficie della Terra è molto più complessa a causa dei differenti punti di vista. I risultati generali, tuttavia, sono gli stessi.

Ci sono due componenti principali del moto: la componente est-ovest e quella nord-sud. La prima è uno spostamento apparente in longitudine lungo l'arco geostazionario dalla posizione nominale d'orbita. La seconda è uno spostamento apparente perpendicolare al piano dell'equatore.

Una delle cause dello spostamento est-ovest è da ricercarsi nella forma ellittica della sezione equatoriale della Terra (vedi II.6). La distribuzione asimmetrica della massa della Terra attorno l'equatore produce quattro punti di equilibrio per un'orbita geostazionaria: due stabili a longitudini  $75^\circ\text{E}$  e  $105^\circ\text{W}$  (lungo la linea dell'asse minore della Terra) e due instabili a  $165^\circ\text{E}$  e  $15^\circ\text{W}$ , lungo l'asse maggiore. Si hanno cioè separazioni di  $90^\circ$  fra punti stabili ed instabili. I satelliti che sono in una posizione intermedia fra punti di equilibrio possono trovarsi in una di queste due situazioni:

1. Se la componente tangenziale della forza gravitazionale ha la stessa direzione del moto del satellite (da ovest ad est) il satellite acquista energia, quindi l'altezza dell'orbita aumenta, diminuisce la velocità orbitale ed aumenta il periodo. Il satellite si sposta verso il punto di equilibrio stabile più vicino.
2. Una volta superato il punto di equilibrio, il satellite risente di una forza opposta alla direzione di moto, che riduce la sua energia. L'altezza dell'orbita diminuisce ed il satellite accelera; diminuisce così il periodo orbitale, il satellite ritorna alla posizione di equilibrio stabile ed il ciclo continua.

Un'analisi del moto del satellite mostra che, se il moto rimane non corretto, il satellite tenderà ad oscillare attorno una posizione di equilibrio stabile con una velocità massima di  $0.4^\circ$  al giorno e con un periodo di 840 giorni (periodo di librazione). Naturalmente, un satellite operativo deve rimanere entro una regione prefissata; a tal fine si usano i motori a getto per le opportune correzioni d'orbita. Un valore tipico di variazioni di velocità del satellite è dell'ordine di  $2\text{ m/s/anno}$ .

Un'altro effetto che influisce sulla componente est-ovest del moto è il vento solare. L'effetto del vento solare, di aumentare l'eccentricità dell'orbita, è schematizzato in Figura IV.1.11. L'eccentricità dell'orbita causa un'oscillazione est-ovest di ampiezza  $w_e = \pm 360^\circ e/\pi$ . Anche in questo caso si usano i motori a getto per le correzioni. Di solito si combinano opportunamente le correzioni d'orbita per correggere i due effetti. Si noti che entrambi gli effetti producono un moto del satellite sul piano dell'orbita che si manifesta come spostamento est-ovest.

**Figura IV.1.11:** Effetto del vento solare su un'orbita geostazionaria: l'eccentricità aumenta da a) a c). A, Apogeo; P, perigeo; a, semiasse maggiore.

La ragione della forma ad otto (o analemma) è che il moto del satellite lungo la sua orbita inclinata tenderà alternativamente a ritardare rispetto la rotazione uniforme della Terra e poi a raggiungerla.

Analogamente le perturbazioni dovute alla gravità del Sole e della Luna si manifestano come uno spostamento apparente in latitudine che richiede un correzione del piano dell'orbita (nord-sud). Poichè il Sole e la Luna non sono complanari con un'orbita geostazionaria equatoriale, la componente della loro attrazione gravitazionale che è perpendicolare al piano dell'orbita del satellite ne fa aumentare l'inclinazione. L'inclinazione produce una forma ad otto di metà altezza  $h$  e metà larghezza  $w_i$ :

$$\tan w_i = \frac{1}{2} \sqrt{\sec i - \sqrt{\cos i}} \approx \tan^2 \frac{i}{2} \quad (\text{IV.25})$$

**Figura IV.1.12:** Moto apparente diurno di un satellite in un'orbita geostazionaria inclinata di 4°.

Il satellite appare spostarsi in latitudine come è indicato in Figura IV.1.12. L'attrazione gravitazionale del Sole e della Luna produce un aumento di inclinazione massimo di circa 15° in 27.5 anni. Poichè le correzioni del piano dell'orbita richiedono molto più combustibile che quelle nel piano dell'orbita, un valore tipico delle variazioni di velocità necessarie è dell'ordine di 50 m/s/anno.

In generale, gli effetti del vento solare (che modifica l'eccentricità dell'orbita) e della gravità del Sole e della Luna (che modificano l'inclinazione) si sovrappongono. Si ottengono due forme possibili dell'orbita a seconda della prevalenza del primo o del secondo effetto (vedi Figura IV.1.13).

**Figura IV.1.13:** Moto apparente diurno di un satellite sotto gli effetti combinati di inclinazione ed eccentricità.