8 novembre $\quad I$ un intervallo

<u>Def</u> $f: I \to \mathbb{R}$ è concava se $-f$ è convessa.

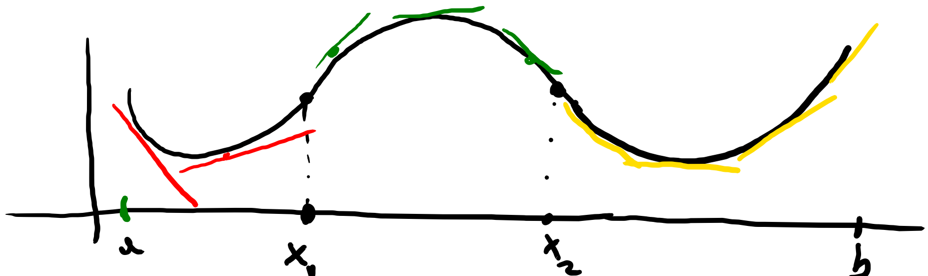
<u>Teo</u> Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$. Supponiamo esista $f'(x)$ $\forall x \in (a,b)$

1) Allora, f è concava in $(a,b) \iff f'(x)$ è decrescente in (a,b)

2) Supponiamo esista $f''(x)$ $\forall x \in (a,b)$

Allora f è concava in $(a,b) \iff f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

In generale, dato $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f non è né convessa né concava in I. Però in generale è possibile scomporre I in una unione di intervalli all'interno dei quali f è o convessa o concava



I punti in cui f cambia carattere e da convessa diventa concava (o viceversa) vengono detti punti di flesso.

$$f_\alpha(x) = \alpha x^3 - x + 1 + \lg x \qquad x>0$$

1) Studiare dove è concava e dove è convessa

$$f''_\alpha(x) = 6\alpha x + \left(\frac{1}{x}\right)' = 6\alpha x - x^{-2} \qquad x>0$$

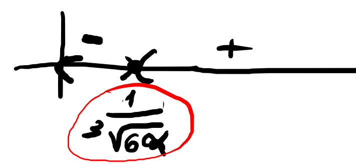
$$f''_\alpha(x) \le -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad \forall \; \alpha \le 0$$

$\Rightarrow$ f_α è concava in $\mathbb{R}_+$ se $\alpha \le 0$

Prendiamo ora $\alpha > 0$. Cerchiamo le soluzioni di

$$f''_\alpha(x) = 6\alpha x - x^{-2} = 0 \iff 6\alpha x^3 - 1 = 0$$

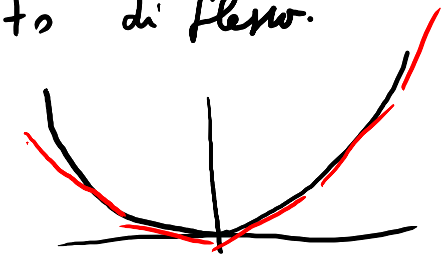
$$\iff x^3 = \frac{1}{6\alpha} \iff x_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{6\alpha}}.$$



per $\alpha > 0$ nell'intervallo $\left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{6\alpha}}\right]$ f_α è concava

mentre in $\left[\frac{1}{\sqrt[3]{6\alpha}}, +\infty\right)$ la funzione f_α è convessa

ed in particolare $\frac{1}{\sqrt[3]{6\alpha}}$ è un punto di flesso.



<u>Esempio</u> $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2 \geq 0$. La funzione è convessa

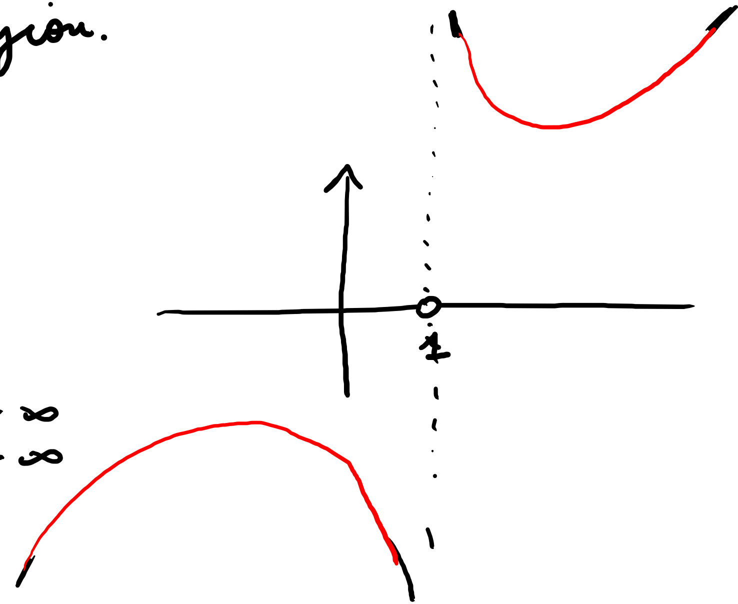
$f''(0) = 0$ ma 0 non è un punto di flesso

Esempi di studi di funzioni.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$$

1) Dominio $\quad x \neq 1$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}} = \begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}$



$\lim\limits_{\substack{x \to 1^+ \\ 1^-}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1^+ \\ 1^-}} \frac{x^2+1}{x-1} = \begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}$

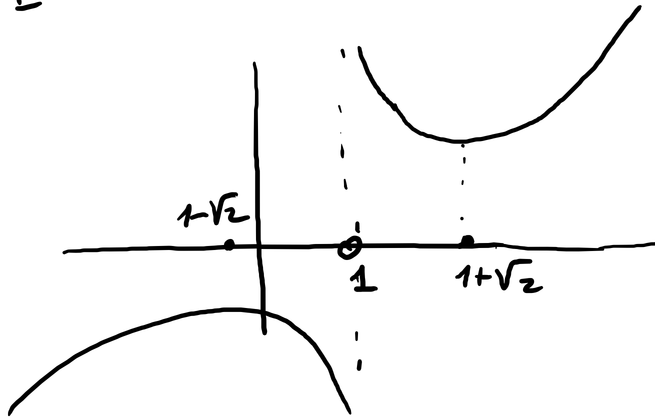
3) $f'(x) = \left(\dfrac{x^2+1}{x-1}\right)' = \dfrac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{\cancel{2}x^2 - 2x - \cancel{x^2} - 1}{(x-1)^2}$

$$= \frac{x^2 - 2x - 1}{(x-1)^2} = 0$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x_\pm = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x_+ = 1 + \sqrt{2} > 0 > x_- = 1 - \sqrt{2}$$



4) $f''(x) = \dfrac{(2x-2)(x-1)^2 - (x^2-2x-1)\,2(x-1)}{(x-1)^4}$

$$= \frac{2}{(x-1)^3}\left[(x-1)^2 - (x^2-2x-1)\right] = \frac{4}{(x-1)^3}$$

$$\left[\cancel{x^2} - \cancel{2x} + 1 - \cancel{x^2} + \cancel{2x} + 1\right]$$

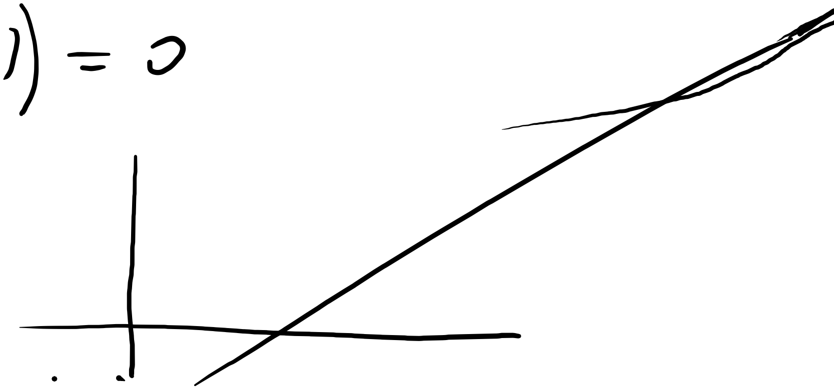
$f''(x) > 0$ per $x > 1$

< 0 $\quad x < 1$

Def Data $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$ diciamo che la retta $y = mx + c$ è la retta asintotica a $+\infty$ della funzione, se

$$\lim_{x \to +\infty} \Big(f(x) - (mx + c) \Big) = 0$$

Per trovare la retta asintotica si procede in due passaggi distinti



Prima si cerca m e poi si cerca c.

Se esiste una retta asintotica $y = mx + c$, cioè

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (mx+c)\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (mx+c)}{x} = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - mx}{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ Cerchiamo una retta asintotica

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

Ora cerchiamo c

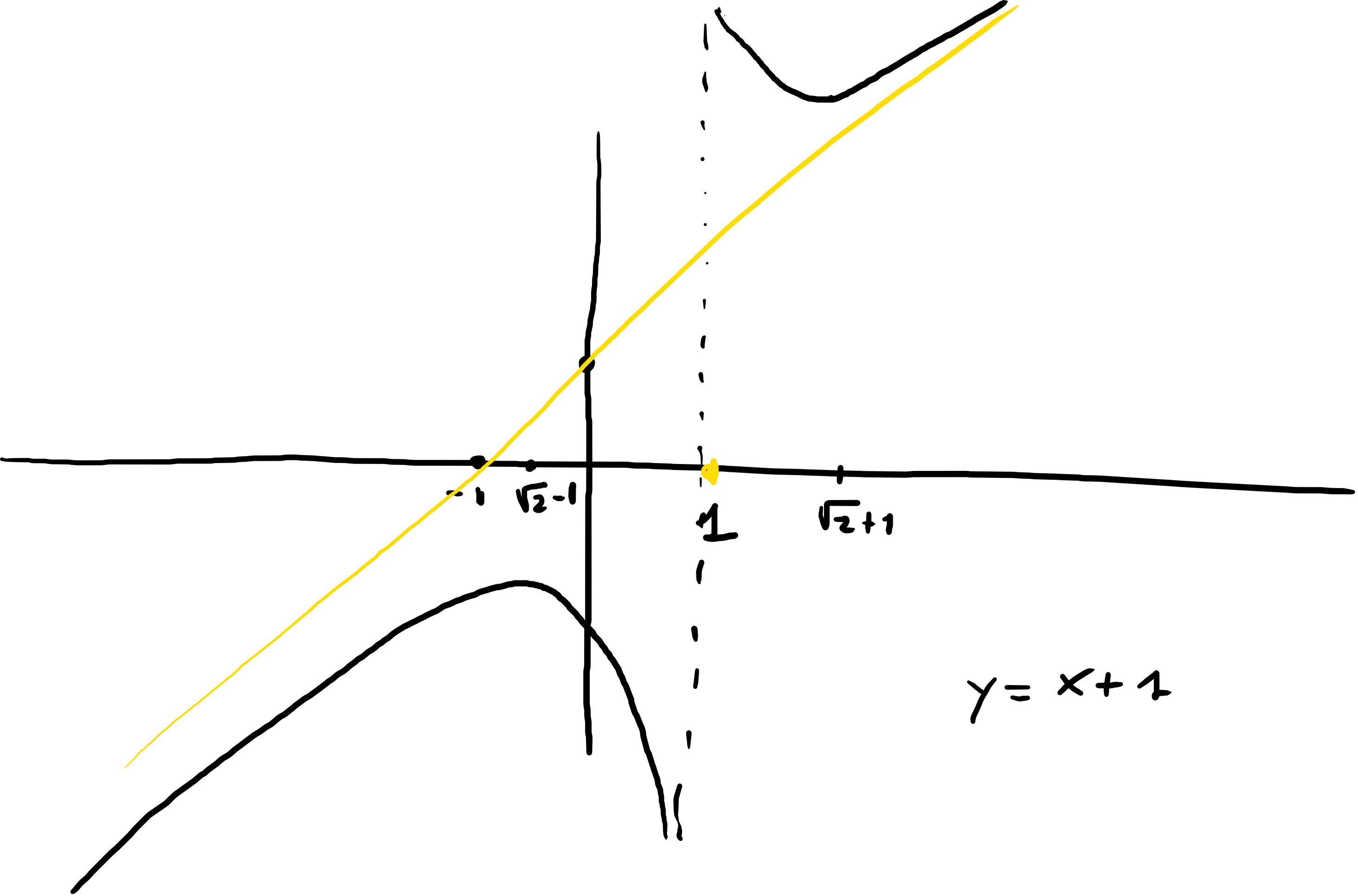
Osserviamo che $\lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-(mx+c)\big)=0$

$\iff \lim_{x\to+\infty} \big(f(x)-mx\big)=c$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2+1}{x-1}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1-x(x-1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}+x}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1=c$$

Concludiamo che la retta $y=x+1$ è retta asintotica sia a $+\infty$ che a $-\infty$.


-1
√2-1
1
√2+1
y = x + 1

Dato $x^a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

$$(x^a)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\, x^{a-n}$$

Osserviamo che se $a = n$

$$(x^n)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (n-j+1) \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{x^0} = \prod_{j=1}^{n} (n-j+1) =$$

$$= n\,(n-1) \cdots 1 = n!$$

$$(x^n)^{(m)} = 0$$

con $m > n$

Più in generale, se $p(x)$ è un polinomio di grado $\leq n$ allora per $m > n$

$$p^{(m)}(x) = 0$$

Lemma Siano $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ n costanti date. Allora esiste un unico polinomio $p(x)$ di grado $\leq n$ con la proprietà che

$$p^{(j)}(0) = a_j \qquad j = 0, \dots, n$$

Questo polinomio è dato dalla seguente formula:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j \frac{x^j}{j!} \qquad *$$

<u>Dim</u> Dimostriamo che il polinomio in $*$

verifica $P^{(k)}(0) = a_k \qquad k = 0, \dots, n.$

$$P^{(k)}(x) = \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \frac{x^j}{j!} \right)^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} \frac{a_j}{j!} \left(x^j \right)^{(k)} =$$

$$= \sum_{j=k}^{n} \frac{a_j}{j!} \left(x^j \right)^{(k)} = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_j}{j!} \left(x^j \right)^{(k)} + \frac{a_k}{k!} \left(x^k \right)^{(k)}$$

Ricordiamo

$(x^k)^{(k)} = k!$

$$p^{(k)}(x) = \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_j}{j!} \left(x^j\right)^{(k)} + a_k =$$

$$= \sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_j}{j!} \prod_{i=1}^{k} (j-i+1)\, x^{j-k} + a_k$$

$$p^{(k)}(0) = \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} \frac{a_j}{j!} \prod_{i=1}^{k} (j-i+1)\, 0^{j-k}}_{0} + a_k = a_k$$

$0^{j-k} = 0$

$\forall \; k = 0, \dots, n$

Dimostriamo che $p(x)$ e' l'unico con questa proprietà

$$q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j = \sum_{j=0}^{n} \frac{(b_j j!)}{j!} x^j$$

$$q^{(k)}(0) = b_k k! \qquad \forall\, k = 0, \dots, n$$

$$= a_k$$

$$\Longrightarrow \quad b_k = \frac{a_k}{k!} \qquad \forall\, k = 0, \dots, n$$

$$\Longrightarrow \quad q(x) \equiv p(x)$$