MATRICI

Def Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$.
Una <u>matrice $m \times n$</u> a <u>entrate</u> in $\mathbb{K}$ è una tabella di scalari $a_{ij} \in \mathbb{K}$ definiti per $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$, della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

Il primo indice di a_{ij} si chiama indice di riga e il secondo è detto indice di colonna

Es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ è una matrice reale 2×2
1 è nel posto $(1,1)$, 3 nel posto $(2,1)$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ è una matrice reale 2×3

$\begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ è una matrice complessa 3×2.

OSS Una matrice 1×1 (a) è essenzialmente uno scalare.

Def L'insieme delle matrici $m \times n$ a entrate in $\mathbb{K}$ si denota con $M_{m,n}(\mathbb{K})$ o anche con $\mathbb{K}^{m \times n}$.
Si pone $M_n(\mathbb{K}) \overset{def}{=} M_{n,n}(\mathbb{K})$ (matrici quadrate di <u>ordine n</u>)

<u>OSS</u> 1) $M_{m,1}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K}^m$

Vettore colonna

2) $M_{1,m}(\mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{pmatrix} \;\middle|\; a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K} \right\} = \mathbb{K}^m$

Vettore riga

<u>Def</u> Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Si chiama <u>somma</u> di A e B la matrice

$$A + B \overset{\text{def}}{=} (a_{ij} + b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

dove $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$

<u>Es</u> $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Sia ora $\lambda \in \mathbb{K}$ e $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Poniamo

$$\lambda A \overset{\text{def}}{=} (\lambda a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \quad \text{(prodotto scalare)}$$

<u>Es</u> $3 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}$

<u>Teorema</u> $M_{m,n}(\mathbb{K})$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$ rispetto alle operazioni di somma e prodotto scalare. Inoltre $\dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$.

Dim Le operazioni $+$ e $\cdot$ soddisfano tutte le proprietà della definizione di spazio vettoriale, come si verifica facilmente. La matrice nulla

$$0 = 0_{m,n} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

è l'elemento neutro additivo: $A + 0 = 0 + A = A$ $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

Se $A = (a_{ij})$, $-A \stackrel{def}{=} (-a_{ij})$ è l'opposto di A.

Verifichiamo, a titolo di esempio, la proprietà distributiva

$$(\lambda + \mu) A = ((\lambda + \mu) a_{ij}) = (\lambda a_{ij} + \mu a_{ij}) =$$
$$= (\lambda a_{ij}) + (\mu a_{ij}) = \lambda (a_{ij}) + \mu (a_{ij}) =$$
$$= \lambda A + \mu A.$$

Sia ora $E_{ij} \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice $m \times n$ che ha 1 nel posto (i,j) e 0 altrove $\forall\, 1 \leq i \leq m$, $\forall\, 1 \leq j \leq n$

Sono in totale $m \cdot n$ matrici.

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \cdots$$

Le matrici $\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ sono base per $M_{m,n}(\mathbb{K})$

In effetti se $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ allora

$$A = \sum_{i,j} a_{ij} E_{ij}$$

quindi queste matrici E_{ij} generano $M_{m,n}(\mathbb{K})$ e la loro indipendenza lineare segue banalmente.

Quindi $\dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = m\, n$.

Es Le matrici

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sono base di $M_2(\mathbb{R})$, $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$

Prodotto di matrici

Def Siano $A = (a_{ik}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{rs}) \in M_{n,l}(\mathbb{K})$.

Si chiama prodotto righe per colonne la matrice $m \times l$ che ha come entrate di posto (i,j)

$$c_{ij} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Si pone $AB \overset{\text{def}}{=} (c_{ij}) \in M_{m,l}(\mathbb{K})$

OSS Se $A = (a_1 \cdots a_n) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$

$$AB = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n \in M_1(\mathbb{K}) = \mathbb{K}.$$

In generale per una matrice A qualunque denotiamo con $A^{(i)}$ la i-esima riga di A e con $A_{(j)}$ la sua j-esima colonna.

Dalla definizione del prodotto so che

$$(AB)_{ij} = A^{(i)} B_{(j)} .$$

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, $A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 4 - 3 - 6 = -5$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 8 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Se $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$ la diagonale principale è il vettore $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

Es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Def La matrice quadrata

$$I_n \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

avente 1 nella diagonale principale e 0 altrove è detta matrice identica di ordine n.

Per $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha

$$I_m A = A I_n = A$$

cioè la matrice identica è elemento neutro moltiplicativo.

Per dimostrarla introduciamo il δ di Kronecker

$$\delta_{ij} \stackrel{def}{=} \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad \forall\, i,j \in \{1, \dots, n\}$$

$$I_n = (\delta_{ij})$$

$$(A\, I_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \delta_{kj} = a_{ij} \quad \forall\, i,j \Rightarrow A\, I_n = A$$

$$(I_m\, A)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \delta_{ik}\, a_{kj} = a_{ij} \quad \forall\, i,j \Rightarrow I_m\, A = A.$$

Teorema

1) $(A+B)\,C = A\,C + B\,C$
2) $C\,(A+B) = C\,A + C\,B$
3) $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$

in tutti i casi in cui le operazioni hanno senso.

Dim 1) $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$
$C = (c_{rs}) \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$

$$\big((A+B)\,C\big)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{ik}\; c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik})\, c_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(a_{ik} c_{kj} + b_{ik} c_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj} =$$

$$= (AC)_{ij} + (BC)_{ij} \quad \forall\, i,j \implies (A+B)C = AC + BC.$$

2) è simile $\boxed{E}$

3) $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,\ell}(\mathbb{K})$, $C \in M_{\ell,p}(\mathbb{K})$

$$\left((AB)C \right)_{ij} = \sum_{k=1}^{\ell} (AB)_{ik}\, c_{kj} = \sum_{k=1}^{\ell} \left(\sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hk} \right) c_{kj} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hk} c_{kj} = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{\ell} a_{ih} b_{hk} c_{kj} =$$

$$= \sum_{h=1}^{n} a_{ih} \sum_{k=1}^{\ell} b_{hk} c_{kj} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} (BC)_{hj} =$$

$$= \left(A(BC) \right)_{ij} \quad \forall\, i,j \implies (AB)C = A(BC).$$

Pertanto potremo scrivere ABC.