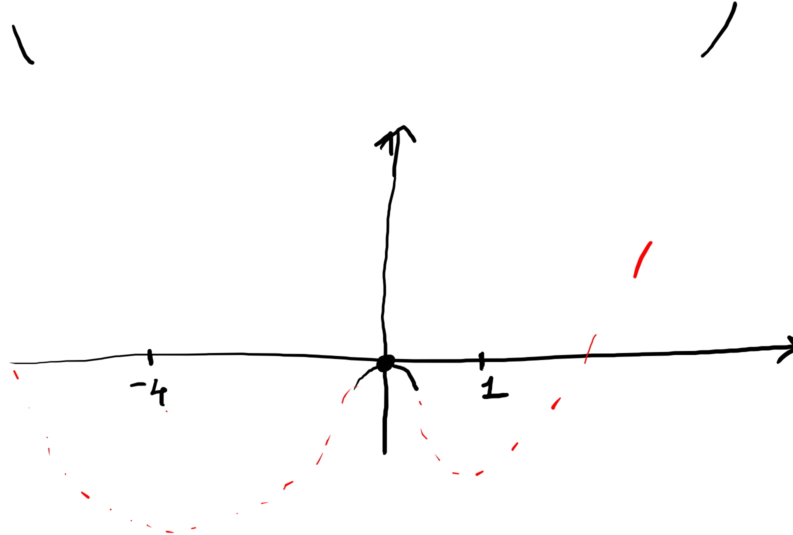
9 Novembre

$$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2$$



1) Dominio $= \mathbb{R}$

2) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^4}{4} = +\infty$

3) ha un punto di minimo assoluto

4) $f'(x) = x^3 + 3x^2 - 4x = x(x^2 + 3x - 4) = x(x-1)(x+4)$

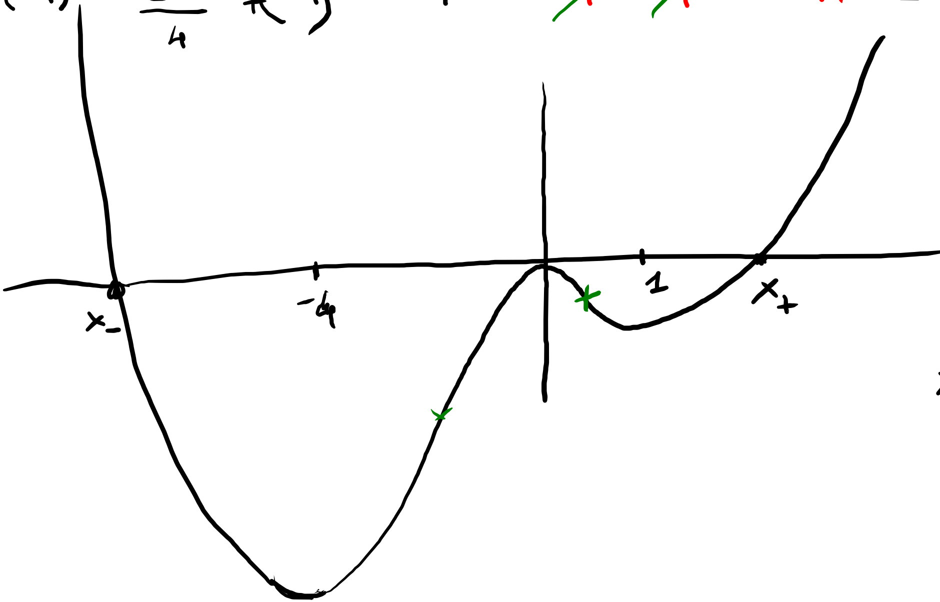
punti critici sono $x=0$, $x=1$ e $x=-4$

5) $f''(x) = 3x^2 + 6x - 4$ $\quad f''(0) = -4$ quindi 0 è un punto di massimo locale

$f(x) = \frac{x^4}{4} + x^3 - 2x^2$

$f(1) = \frac{1}{4} + 1 - 2 = -\frac{3}{4}$

$f(-4) = \frac{(-4)^4}{4} + (-4)^3 - 2\cdot 4^2 = \cancel{4^3} - \cancel{4^3} - 2\cdot 16 = -32 < -\frac{3}{4}$



$f(x) = x^2\left(\frac{x^2}{4} + x - 2\right) = 0$

$x = 0$

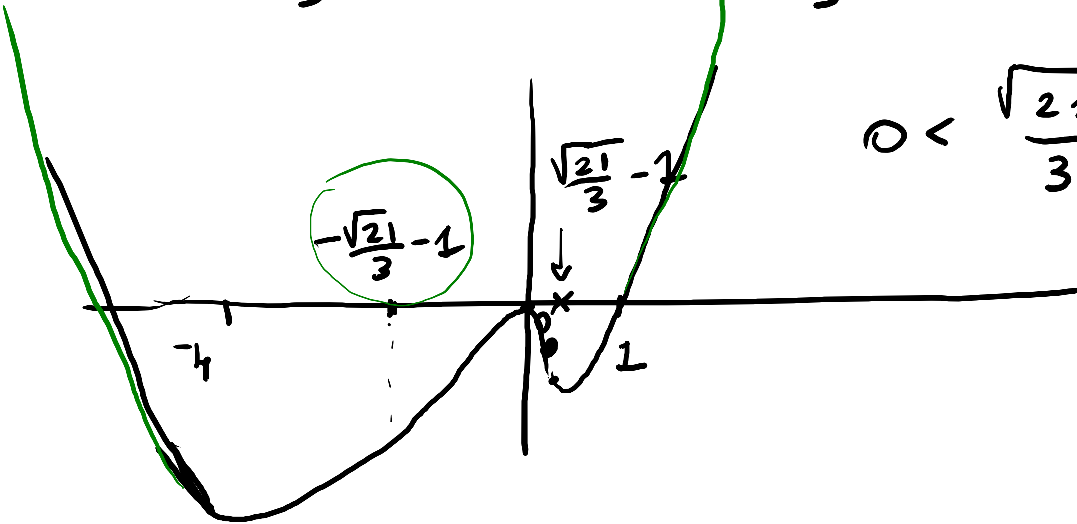
$x^2 + 4x - 8 = 0$

$x_\pm = -2 \pm \sqrt{4+8} =$

$= -2 \pm \sqrt{12}$

$$f''(x) = 3x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$x_\pm = -1 \pm \frac{\sqrt{9+12}}{3} = -1 \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$$



$$0 < \frac{\sqrt{21}}{3} - 1 < 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\sqrt{21}}{3} < 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\sqrt{21} < 6$$

$$21 < 36$$

6) Non ci sono rette asintotiche

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ -\infty}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^4}{4}}{x} = \frac{1}{4} \lim_{x \to +\infty} x^3 = \begin{array}{l} +\infty \\ -\infty \end{array}$$

Ieri abbiamo dimostrato che assegnate le costanti

$a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ esiste un polinomio $p(x)$

di grado $\leq n$ t.c. $p^{(k)}(0) = a_k$ $k = 0, \dots, n$

ed è esattamente dato da

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k$$

L'analogo enunciato con 0 sostituito da un fissato $x_0 \in \mathbb{R}$

è anche vero. E cioè $\exists!$ polinomio di grado $\leq n$ t.c.

$p^{(k)}(x_0) = a_k$, $k = 0, \dots, n$. $\qquad p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} (x - x_0)^k$.

$$(e^x)^{(n)} = e^x$$

$(\sin x)^{(0)} = \sin x$

$(\sin x)^{(1)} = \cos x$

$(\sin x)^{(2)} = (\cos x)' = -\sin x$

$(\sin x)^{(3)} = (-\sin x)' = -\cos x$

$(\sin x)^{(4)} = (-\cos x)' = -(\cos x)' = \sin x$

$(\sin x)^{(5)} = \cos x$

$(\sin x)^{(6)} = -\sin x$

$\sin^{(7)}(x) = -\cos x$

$(\sin x)^{(n)} = \sin^{(n)} x$

$\sin^{(n)}(x) = \sin^{(r)}(x)$

In generale se $n : 4 = q$ col resto di $r \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$(\sin x)^{(n)} = (\sin x)^{(4\cdot q + r)} = \left((\sin x)^{(4\cdot q)}\right)^{(r)}$$

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{n} \sin x = \left(\frac{d}{dx}\right)^{r} \left(\frac{d}{dx}\right)^{4\cdot q} \sin x = \left(\frac{d}{dx}\right)^{r} \underbrace{\left(\frac{d}{dx}\right)^{4} \cdots \left(\frac{d}{dx}\right)^{4}}_{q} \sin x$$

$$= \left(\frac{d}{dx}\right)^{r} \sin x$$

$\boxed{n = 4q + r}$ $\quad r \in \{0, 1, 2, 3\}$

$$\Rightarrow (\sin x)^{(n)} = (\sin x)^{(r)}$$

$$(\cos x)^{(n)} = (\cos x)^{(r)}$$

$$\boxed{\left(\lg(1+x)\right)^{(n)} = (-1)^{n-1}\,(n-1)!\,(1+x)^{-n}}$$

$$\left(\lg(1+x)\right)' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \qquad n=1$$

$$\left(\lg(1+x)\right)^{(n+1)} = \left(\left(\lg(1+x)\right)'\right)^{(n)} = \left((1+x)^{-1}\right)^{(n)}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (-\cancel{1}-j+\cancel{1})\,(1+x)^{-1-n}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} (-j)\,(1+x)^{-1-n}$$

$$= (-1)^n \prod_{j=1}^{n} j\,(1+x)^{-1-n}$$

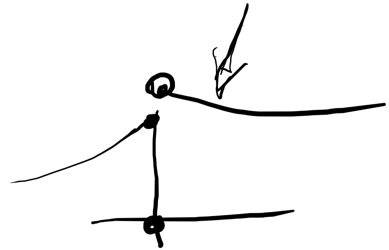
$$= (-1)^n\, n!\,(1+x)^{-1-n}$$

$$\left(x^a\right)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\,x^{a-n}$$

$$\left((1+x)^a\right)^{(n)} = \prod_{j=1}^{n} (a-j+1)\,(1+x)^{a-n}$$

Sia

$$f(x) = \begin{cases} p(x) + \sin(x) + e^{x} - 1 & x > 0 \\ 1 - \cos(x) & x \leq 0 \end{cases}$$



$p(x)$ un polinomio.

Si determini un $p(x)$ di grado minimo t.c.

$$f \in C^2(\mathbb{R})$$

1) Qui, per qualsiasi $p(x)$ risulta che $f(x)$ è continua, ed infatti è C^2 al difuori dell'origine

2) $f \in C^0(\mathbb{R}) \iff f$ è continua in 0

f continua in $0 \iff \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \iff$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$ e $\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (1 - \cos x) = 1 - \cos(0) = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(p(x) + \sin(x) + e^x - 1\right) = p(0) + \sin(0) + e^0 - 1 = p(0)$$

$$= f(0) = 0$$

Quindi un qualsiasi polinomio $p(x)$ con $p(0) = 0$ rende f continua in 0.

3) Vogliamo discutere quando $f \in C^1(\mathbb{R})$.

Incominciamo a discutere dell'esistenza di $f'(0)$

Abbiamo bisogno che esista $f'_s(0)$

$f'(x)$ per $x<0$
$\shortparallel$
$\sin x$

$$f'_s(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0$$

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{p(x)+\sin(x)+e^x-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(p'(x)+\cos(x)+e^x\right) = p'(0)+2 = f'_s(0) = 0$$

$f'(x)$

$p(0)=0$ $\quad p'(0)=-2$

Abbiamo dimostrato che $f'(0)$ esiste e che $f' \in C^0(\mathbb{R})$

$$f'(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } x \le 0 \\ p'(x) + \cos x + e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} p(0) &= 0 \\ p'(0) &= -2 \end{aligned}}$$

4) Vogliamo stabilire per quali $p(x)$ si ha $f'' \in C^0(\mathbb{R})$

$$(f')'_s(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x)}{x} \overset{1}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^-} \underbrace{\cos x}_{f''(x) \text{ per } x<0} = 1$$

$$(f')'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{p'(x) + \cos x + e^x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\left(p''(x) - \sin x + e^x\right)}_{f''(x) \text{ per } x>0}$$

$$= p''(0) + 1 = 1$$

$$p''(0) = 0 \implies f''(0) = 1 \qquad p''(0) = 0$$

$P(0) = P''(0) = 0 \qquad P'(0) = -2$

Supponiamo che $\quad P(x) = \dfrac{0}{0!} + \dfrac{-2}{1!}x + \dfrac{0}{2!}x^2 = -2x$

$P^{(k)}(0) = a_k \qquad k = 0, \dots, n$

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} x^k$$

$P(x) = -2x$ soddisfa le condizioni richieste