

ESERCIZI DI GEOMETRIA 1, FOGLIO 4

Trieste, 10 novembre 2021

1. Sia w_1, \dots, w_m una base del sottospazio W di V , e sia

$$w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n$$

un suo prolungamento a una base di V . Dimostrare che le classi d'equivalenza $[v_{m+1}], \dots, [v_n]$ costituiscono una base dello spazio vettoriale quoziente V/W (introdotto nel foglio 2, esercizio 2).

2. Si consideri il seguente sistema lineare a coefficienti in \mathbb{R} :

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 + x_5 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 3. \end{cases}$$

Scrivere la matrice A dei coefficienti e la matrice completa A' del sistema. Applicare l'algoritmo di Gauss per trasformarle in matrici a gradini, indicando i gradini e i pivot. Scrivere poi il nuovo sistema lineare a gradini, indicare i parametri liberi, trovare lo spazio delle soluzioni W del sistema omogeneo associato, una base di W e una soluzione particolare del sistema generale.

3. Applicare l'algoritmo di Gauss al seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 & = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 & = 8 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_4 & = b \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 2. \end{cases}$$

Indicare i pivot, dire per quali valori di b il sistema è compatibile, in tali casi descrivere lo spazio delle soluzioni e la sua dimensione.

4. Si consideri il sistema lineare omogeneo avente M come matrice

$$\text{associata: } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a+2 \\ 2a+1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Discutere e risolvere il sistema al variare di $a \in \mathbb{R}$.

5. Nello spazio vettoriale \mathbb{R}^4 sono dati i vettori

$$v_1 = (1, 0, 0, 1), v_2 = (1, 1, 1, 1), v_3 = (-1, 1, 1, 0), v_4 = (2, 0, 0, 2).$$

Detto W il sottospazio da essi generato, determinare la dimensione di W , una sua base, e un sottospazio supplementare a W .