Def Sia $A=(a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Si chiama trasposta di A la matrice

$$^tA = (a'_{ij}) \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

dove $a'_{ij} = a_{ji}$, ottenuta scambiando le righe e le colonne di A.

Es

$$^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Teorema

1) $^t(A+B) = {}^tA + {}^tB \quad \forall\, A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

2) $^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$

3) $^t(AB) = {}^tB\, {}^tA \quad \forall\, A \in M_{m,n}(\mathbb{K}),\ B \in M_{n,l}(\mathbb{K})$

Dim 1) e 2) sono banali.

Dimostriamo 3). $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e poniamo $a'_{ij} = a_{ji}$, $b'_{ij} = b_{ji}$ $\Rightarrow$ ${}^tA = (a'_{ij})$, ${}^tB = (b'_{ij})$

$$\left({}^t(AB)\right)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} b'_{ik} a'_{kj} =$$

$$= \left({}^tB\, {}^tA\right)_{ij} \quad \forall\, i, j.$$

Sia ora $A \in M_{m,n}(\mathbb{K}) \rightsquigarrow$

$$L_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^m$$

$$L_A(X) = AX \quad , \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$$

$$AX \in M_{m,1}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^m .$$

Si ha:

$$L_A(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY =$$
$$= L_A(X) + L_A(Y) \quad \forall X, Y \in \mathbb{K}^n$$

$$L_A(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda AX = \lambda L_A(X) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \ (*)$$
$$\forall X \in \mathbb{K}^n$$

(*) In generale $A(\lambda B) = \lambda AB$ (ovvio)
$\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,l}(\mathbb{K})$.

<u>Es</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$

$$L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 4x_2 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

In generale le componenti di AX sono polinomi omogenei (senza termine noto) di 1° grado oppure nulli.

Def Siano V e W due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.
Un'applicazione $f: V \to W$ è <u>lineare</u> se

i) $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V$
ii) $f(\alpha v) = \alpha f(v) \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\, v \in V.$

Oss Equivalentemente $f: V \to W$ è lineare se $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$ $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K},\ \forall\, v_1, v_2 \in V.$

Es Se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ allora $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ è lineare.

Oss $f: V \to W$ lineare $\Rightarrow f(0_V) = 0_W$
infatti $f(0_V) = f(0_V + 0_V) = f(0_V) + f(0_V)$
$\Rightarrow f(0_V) + f(0_V) - f(0_V) = 0_W \Rightarrow$
$f(0_V) = 0_W$.

Siano ora V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione finita e sia $f: V \to W$ <u>lineare</u>.

Consideriamo una base ordinata
$\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ di V e una base (ordinata)
$\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ di W.

Allora $\forall\, v \in V \quad \exists!\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ t.c.

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$$

e analogamente $\exists!\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$ t.c.

$$f(v) = y_1 w_1 + \dots + y_m w_m = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i$$

Svolgiamo i calcoli, usando la linearità di f.

$$f(v) = f\Big(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j)$$

Ora $f(v_j) \in W$ è combinazione lineare unica di $w_1, \dots, w_m$, cioè esistono certi coefficienti $a_{ij} \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, t.c.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

Quindi $f(v) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i\Big) =$

$$= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\Big) w_i$$

Confrontando con l'espressione $f(v) = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i$ e tenendo presente l'unicità delle componenti:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$$

Considerando la matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ si ha quindi

$$Y = AX = L_A(X).$$

Abbiamo dimostrato il seguente teorema.

Teorema Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, con $\dim V = n$ e $\dim W = m$, e siano $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V e $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ una base di W. Allora qualunque applicazione lineare $f: V \to W$ si può rappresentare mediante una matrice, precisamente la matrice che ha come colonne le componenti, nella base $\mathcal{W}$, dei vettori $v_1, \dots, v_n$ della base $\mathcal{V}$.

Oss Sia $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonica di $\mathbb{K}^n$ e sia $(c_1, \dots, c_m)$ la base canonica di $\mathbb{K}^m$. Se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ allora

$$(Ae_j)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \delta_{kj} = a_{ij} \implies Ae_j = A_{(j)}$$

essendo $e_j = \begin{pmatrix} \delta_{1j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{pmatrix}$ (δ di Kronecker).

Cioè le colonne di A sono le immagini dei vettori della base canonica del dominio, espresse rispetto alla base canonica del codominio.

Def Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V, $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ una base di W e $f: V \to W$ lineare. La matrice A avente come colonna j-esima le componenti di $f(v_j)$ rispetto alla base $\mathcal{W}$ si chiama matrice di f rispetto alle basi $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ e si denota con

$$A =: M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{W}}(f).$$

Se $f: V \to V$ è lineare e $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ è base per V, scriviamo più semplicemente

$$M_{\mathcal{V}}(f) := M_{\mathcal{V}}^{\mathcal{V}}(f).$$