

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{\sqrt{\lg(\frac{1}{x})}} =$$

$$\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\cancel{x+1} - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} \right] \cdot \left[\frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \right] \cdot \left[\frac{\frac{1}{x}}{\lg(\frac{1}{x})} \right]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lg t}{t}$$

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{\cancel{\sqrt{x}}}{\cancel{\sqrt{x}} \left[\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1 \right]}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha} \lg x = 0}$$

$\alpha \in \mathbb{R}^+$

$$f(x) = \left(\log \left(\frac{x^2}{x+1} \right) \right)^{\frac{1}{x}} = \exp \left[\frac{1}{x} \log \left(2 \log(x) - \log(x+1) \right) \right]$$

$$f'(x) = \exp \left[\dots \right] \cdot \left[-\frac{1}{x^2} \log \left(2 \log(x) - \log(x+1) \right) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2 \log(x) - \log(x+1)} \cdot \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \right]$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{\infty}{\infty}$$

$$0 \cdot \infty$$

$$\infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + \underbrace{\log\left(\frac{1}{x}\right)}_{\substack{\uparrow \\ -\log(x)}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\underbrace{1 - \frac{\log x}{x}}_{\substack{\downarrow \\ 0}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1 - \cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{x^2}{1 - \cos x} \right] = -\infty$$

$\downarrow$
 2

$$0^0 \quad \infty^0 \quad 1^\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad 1^\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = \lim_{x \rightarrow 0} e^{x \log x} = 1$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} [\cos x]^{\frac{1}{x^2}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\left(\frac{1}{x^2} \log(\cos x) \right)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &+\infty \\ &1 \\ &0 \end{aligned}$$

$$\frac{\log(1 + (\cos x - 1))}{\cos x - 1} \cdot \left(\frac{\cos x - 1}{x^2} \right)$$

$\nearrow 1$ $\rightarrow -\frac{1}{2}$

$$n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{x^{-n}} =$$

$$\begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \\ n = 2 \\ n \geq 3 \end{cases}$$

$$1$$

$$e^{-1/6}$$

$$\stackrel{L'H}{=}$$

$$\frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{n^2 x^{n-1} \sin x + n x^n \cos x}$$

$$= \frac{-x \sin x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{n^2 x^{n-1} \sin x + n x^n \cos x}$$

$$-1$$

$$\frac{1}{n^2 x^{n-3} \sin x + n x^{n-2} \cos x}$$

$$n \geq 3$$

$$\rightarrow 0$$

$$n \text{ dispari } n-3 \text{ pari}$$

$$x^{n-3} \sin x < 0$$

$$\uparrow \uparrow$$

$$n-2 \text{ dispari}$$

$$\text{negativo}$$

$$\frac{x \cos x - \sin x}{n x^n \cdot \sin x}$$

$$n \text{ pari } n-3 \text{ dispari}$$

$$n \text{ dispari } n \geq 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\neq \lim$$

$$n \text{ pari } n \geq 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Funzioni iperboliche

$\sinh(x)$ $\cosh(x)$ $\tanh(x)$

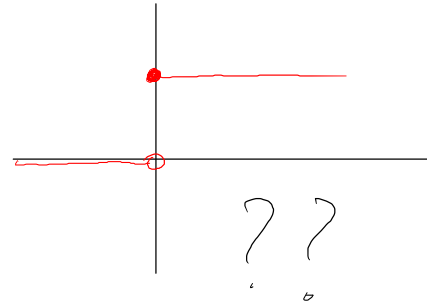
Es: $g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Si trovi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = \text{costante se } x < 0$

$f(x) = c \quad \text{se } x < 0$



$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{c - f(0)}{x}$$

se $f(0) = c$



se $f(0) \neq c$ non derivabile

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - c}{x} = 0 ?$$



Teorema sul limite della derivata

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua e derivabile su $]a, b[$.

Esiste $\lim_{x \rightarrow b} f'(x) = \alpha$.

Allora esiste $f'(b) = \alpha$.

⚠ Se la funzione $f'(x)$ ha limite in un punto $x_0 \in \text{dom } f$ (cioè f è continua) allora f è derivabile in x_0 .

La derivata di una funzione non può avere discontinuità di tipo salto!

$$\left[\begin{array}{l} \text{non esiste} \end{array} \right. \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \alpha}_{\Downarrow} \quad \text{e} \quad \text{esiste} \underbrace{\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) = \beta}_{\Downarrow} \\ \left. \begin{array}{l} f'(x_0) = \alpha \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} f'(x_0) = \beta \end{array} \right]$$

Esistono funzioni f derivabili non C^1 , es:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{non esiste } \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)}$$

Def

continuité

$$f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \stackrel{L'H.}{=} \lim_{x \rightarrow b} \frac{f'(x)}{1} = \alpha$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin x + 2 \cdot \cos x & x \leq 0 \\ 3x^2 + 7x + b & x > 0 \end{cases}$$

$$a, b \in \mathbb{R}$$

f dérivable sur $\mathbb{R}$

I) f continue

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 2$$

" b

$$\Rightarrow b = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin x + 2 \cos x & x \leq 0 \\ 3x^2 + 2x + 2 & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cos x - 2 \sin x & x < 0 \\ 6x + 2 & x > 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \dots$$

oppure, usando il teorema sul limite dello derivato, chiedo

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 2$$

"
 2

$$\leadsto \textcircled{2=2}$$

Def. Sia $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Una funzione $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ si dice una primitiva di f se F è derivabile su E e in tal caso $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in E$.

Una funzione si dice primitivabile se esiste una primitiva di f .

⚠ Se una funzione f presenta uno discontinuità di tipo salto, f non è primitivabile.

oss: se f è primitivabile e F è una sua primitiva, allora $\forall c \in \mathbb{R}$ anche la funzione $F(x) + c$ è una primitiva di f .

Es: si consideri $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = \frac{1}{x}$
si determinino tutte le primitive di f .

$F(x) = \log x$ non è una primitiva perché non è definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$F(x) = \log|x|$$

$$G(x) = 1 + \log|x|$$

$$H(x) = \log|x| + C \quad C \in \mathbb{R}$$

 ↑
 $\int$

$$P(x) = \begin{cases} \log(-x) + 2 & x < 0 \\ \log(x) - 42 & x > 0 \end{cases}$$

~~$$\int \frac{1}{x} = \log x + C$$~~

Ordini di infinito / infinitesimus

Def Siano f, g funzioni infinite in $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

$$\left[\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = +\infty \right]$$

Diciamo che f e g sono dello stesso ordine di infinito in x

$$\text{Ord}_{x_0} f = \text{Ord}_{x_0} g \quad \text{se} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = L \in \mathbb{R}, L \neq 0$$

$$\text{Se } L = +\infty \quad \text{Ord}_{x_0} f > \text{Ord}_{x_0} g$$

$$\text{Se } L = 0 \quad \text{Ord}_{x_0} f < \text{Ord}_{x_0} g$$

se anche $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$

f e g si dicono infinitesime in x_0 ; sono

f è di ordine minore di g se $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = +\infty$

f è dello stesso ordine di g se $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha \neq 0$

f è di ordine superiore di g se $\lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = 0$

Esempio

$$x_0 = +\infty$$

$$f(x) = e^{-x}$$

$$g(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha > 0$$

ord

↑

o minore o per lo inferiore

$$\text{ord}_{+\infty}(f) > \text{ord}_{+\infty}(g)$$

e^{-x} è di ordine sopraiore

per lo maggiore di ogni potenza $x^{-\alpha}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x^\alpha}} \right| = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Es: $\sin x$, $\cos x$, $3^x - 1$, $\log_5(x+1)$, $\textcircled{x}$

$$x_0 = 0$$

sono funzioni infinitesime in 0 dello stesso ordine

Si può dire che una funzione infinitesima in $x_0 \in \mathbb{R}$ è
di ordine $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha > 0$ se

$$\text{ord}_{x_0}(f) = \text{ord}_{x_0}(\underbrace{|x - x_0|^\alpha}_{\substack{\uparrow \\ \text{funzione test}}})$$

$$\text{ord}_0(1 - \cos x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{\underbrace{x^2}_{\uparrow}} \right) = \frac{1}{2} \neq 0$$



il valore del limite non
centro con l'ordine

Notazione

$$x_0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{se } \text{ord}_{x_0}(f(x)) > \text{ord}_{x_0}(\varphi(x))$$

in uno sviluppo

$$f = \sigma(\varphi) \quad \text{in } x_0$$

↑ o più di l'ordine

$$1 - \cos x = \sigma(x) \quad \text{in } 0$$