$a^x \quad x^\alpha \quad \log_a x \qquad +\infty$

$x_0 \qquad \operatorname{tg} x \qquad \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty$

$\operatorname{Ord}_{\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x \overset{?}{=}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{1}{|x-\frac{\pi}{2}|^\alpha}} =$$

funzione test $\quad \cancel{\alpha = \frac{\pi}{2}}$

$$\operatorname{Ord}_{x_0} \frac{1}{|x-x_0|^\alpha} = \alpha$$

$\varphi(x) =$

$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \varphi(x) = +\infty$

$$\frac{1}{|x-\frac{\pi}{2}|^\alpha} \qquad \alpha > 0$$

$|x-x_0|^\alpha$

funzione test

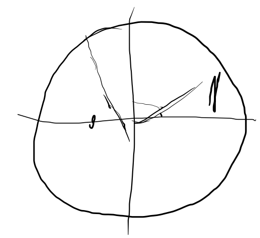
$$\operatorname{Ord}_{\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = \operatorname{Ord}_{\frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} \cancel{x} =$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha}}{\cos x} \overset{l'H.}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{\alpha\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^{\alpha-1}(-1)}{-\sin x} = 1$$

se $\alpha = 1$

$y = \frac{\pi}{2} - x$

$$\frac{y^{\alpha}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)} = \frac{y^{\alpha}}{-\sin(y)}$$



$f(x) = \frac{1}{\log x}$ $x_0 = +\infty$ infinitesimo $\text{ord}_{+\infty} \frac{1}{\log x} =$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{}$

funzione test infinitesimo a $+\infty$ $\frac{1}{x^\alpha}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{\log x}}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\log x} = +\infty$

$\alpha > 0$

$\boxed{\text{ord}_{+\infty} 1/\log x} < \alpha \quad \forall \alpha > 0$

ordine sottoreale

$x_0 = 0$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{\log x}$ infinitesimo in $x_0 = 0$ $\quad |x - x_0|^\alpha$

$$\text{ord}_0 \frac{1}{\log x} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{\log x}}{|x|^\alpha} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\underbrace{|x|^\alpha \log x}_{\to 0}} = +\infty$$

$\text{ord}_0 \dfrac{1}{\log x}$ è sottoreale

Es: $f(x) = x \log x \quad x_0 = 0 \qquad \text{ord}_0 f \begin{cases} < 1 & \text{strettamente!} \\ > 1 - \varepsilon & \forall \varepsilon > 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \cdot \log x}{x^\alpha} = \lim_{x \to 0} \left| x^{1-\alpha} \log x \right| = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \\ 0 & \text{se } \alpha < 1 \end{cases}$$

$0 < \alpha < 1$

infinitesimo di ordine infrareale $1-\varepsilon < \text{ord}_0 f < 1 \quad \forall \varepsilon$!!!

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{|x|^{1-\varepsilon}}$$

Funzioni test

	f infinitesimo	f infinito
$x_0 \in \mathbb{R}$	$\lvert x-x_0\rvert^\alpha$	$\dfrac{1}{\lvert x-x_0\rvert^\alpha}$
$x_0 = \pm\infty$	$\dfrac{1}{\lvert x\rvert^\alpha}$	$\lvert x\rvert^\alpha$

$f(x) = \log\left(x^2 + \operatorname{sen} x\right) \qquad x_0 = 0$

$\operatorname{Ord}_0 f < -\alpha \quad \forall \alpha > 0$ <u>sottoreale</u>

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\log\left(x^2+\operatorname{sen}x\right)}{\frac{1}{x^\alpha}} =$

$\alpha > 0 \qquad \lim_{x \to 0} x^\alpha = 0$

$= \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \left[\log\left(x^2+\operatorname{sen}x\right)\right] = \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \left[\log\left(x\left(x + \overbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}^{\to 1}\right)\right)\right] =$

$= \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \cdot \Big(\log x + \underbrace{\log\Big(x + \overbrace{\frac{\operatorname{sen}x}{x}}^{\to 1}\Big)}_{\to 0}\Big) = 0 \qquad \forall \alpha > 0$

Lemma di Peano

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte su I

sia $0 = f(x_0) = f'(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0)$

Allora $\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n}} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$

In particolare, se $\boxed{f^{(n)}(x_0) \neq 0}$ $\text{ord}_{x_0} f = n$

Dim

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} = \dots$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x)}{n!\,(x-x_0)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

Es:

$f(x) = x - \operatorname{sen}(e^x - 1)$ $\qquad f(0) = 0$

$\operatorname{ord}_0 f = ?$ $\qquad \lim_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{sen}(e^x - 1)}{|x|^\alpha} \ldots$

$f'(x) = 1 - \cos(e^x - 1) \cdot e^x \qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = \operatorname{sen}(e^x - 1) \cdot e^x \cdot e^x - \cos(e^x - 1) \cdot e^x \qquad f''(0) = -1 \neq 0$

Per il lemma di Peano $\operatorname{ord}_0 f = 2$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg}(2x) + x \qquad f(0)=0$$

$$\operatorname{ord}_0 f = ?$$

$$\operatorname{ord}_0 f = 3$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{}{}^{(1+x^2)^{-1}} - \frac{1}{1+4x^2}\cdot 2 + 1 \qquad f'(0)=0$$

$$f''(x) = \underbrace{-(1+x^2)^{-2}\cdot 2x}_{} + 2(1+4x^2)^{-2}\cdot 8x \qquad f''(0)=0$$

$$f'''(x) = [\quad]\cdot 2x - 2(1+x^2)^{-2} + 16\left[(\cdots)\cdot x + (1+4x^2)^{-2}\right]$$

$$f'''(0) = 0 - 2 + 16\quad 0 + 1$$

$$\neq 0$$

Approssimante di ordine n

di grado $\leq n$

$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in I$, una funzione polinomiale $P_n(x) = \underbrace{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}$

si dice approssimante di ordine n di f in x_0 se

1) $P_n(x_0) = f(x_0)$

2) $\displaystyle \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ $\quad \left[\text{cioè } \operatorname{ord}_{x_0} \left[f(x) - P_n(x) \right] > n \right]$

OSS: se $n = 1$ $\quad P_1(x) = \tilde{f}_{[x_0]}(x)$ è l'approssimante lineare

$P_n(x) = a_n (x-x_0)^n + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots + a_2 (x-x_0)^2 + a_1 (x-x_0) + a_0$

$a_0 = P_n(x_0) = f(x_0)$

OSS Sia $P_n(x)$ approssimante di ordine n di f in x_0;

$P_n(x) = a_n(x-x_0)^n + \dots + a_1(x-x_0) + a_0$ Allora $a_0 = f(x_0)$

$a_1 = ?$

$P_n'(x) = n a_n (x-x_0)^{n-1} + (n-1) a_{n-1} (x-x_0)^{n-2} + \dots + 3 a_3 (x-x_0)^2 + 2 a_2 (x-x_0) + a_1$

$P_n'(x_0) = a_1$

$n(n-1) a_n (x-x_0)^{n-2} + \dots \quad 3 \cdot 2 \, a_3 (x-x_0)$

$P_n''(x_0) = 2 a_2$

$P_n'''(x_0) = 3! \, a_3$

$P_n^{(k)}(x_0) = k! \, a_k$ se $k \leq n$

$P_n^{(k)}(x_0) = 0$ se $k > n$

Supponiamo che $\quad ord_{x_0}(f(x)-P_n(x)) > n \geq 1$

supponiamo f derivabile

$\Rightarrow \quad D[f(x)-P_n(x)](x_0) = 0$ (altrimenti per il lemma di Peano sarebbe $ord_{x_0}(f-P_n) = 1$

$f'(x_0) - P_n'(x_0) = 0 \qquad f'(x_0) = P_n'(x_0) = a_1$

$n \geq 2$

$D^2[f(x)-P_n(x)](x_0) = 0$

$f''(x_0) = P_n''(x_0) = 2a_2 \qquad a_2 = \frac{1}{2} f''(x_0)$

$\vdots$

$D^n[f(x)-P_n(x)](x_0) = 0$

$f^{(n)}(x_0) = P_n^{(n)}(x_0) = n!\, a_n \qquad a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$

Quindi, se f è n volte derivabile ed esiste l'approssimante di ordine n di f si ha

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$$

si chiama polinomio di Taylor di ordine n di f in x_0

Teorema di Taylor

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in I. Allora esiste l'approssimante di ordine n di f in x_0 ed è il polinomio di Taylor centrato in x_0

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Dim: Si consideri $P_n(x) =$ allora si verifica che $P_n(x_0) = f(x_0)$

e $\mathrm{ord}_{x_0}(P_n - f) > n$.

Formula di Taylor

$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$ $\quad$ $E_n(x)$ errore di ordine n $\quad$ $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$

Sappiamo che $ord_{x_0} E_n(x) > n$

$$f(x) = P_n(x) + o\left(|x-x_0|^n\right)$$

o piccolo di Landau

Sarebbe utile stimare l'errore.