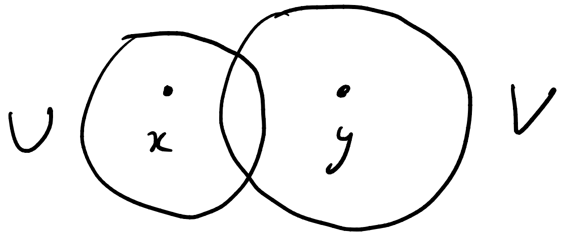
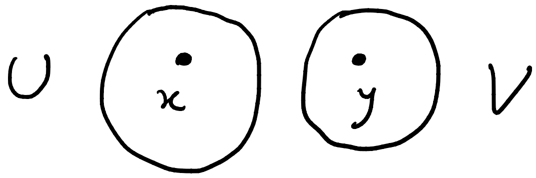
Assiomi di separazione

Def Sia X uno spazio topologico. Diciamo che X è:

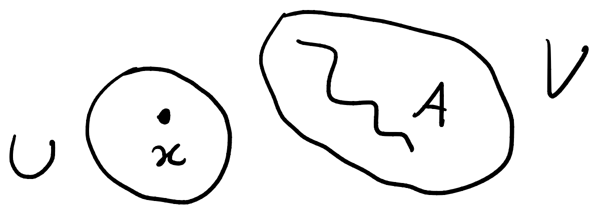
- **T_1** se $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U - V$ e $y \in V - U$.



- **T_2 o di Hausdorff** se $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$.



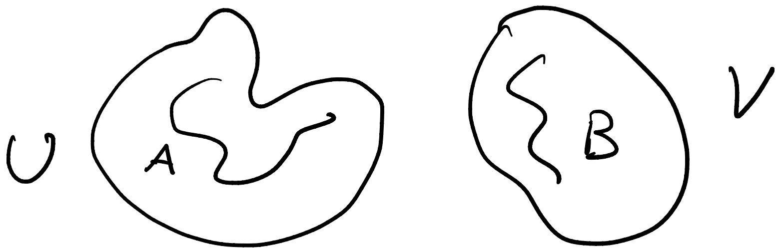
- **T_3 o regolare** se X è T_1 e $\forall\, A \subset X$ chiuso e $\forall\, x \in X - A$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $A \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.



- **T_4 o normale** se X è T_1 e

$\forall\, A, B \subset X$ chiusi con $A \cap B = \emptyset$,

$\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $A \subset U$, $B \subset V$, $U \cap V = \emptyset$.



Teorema X è T_1 $\iff$ tutti i punti di X sono chiusi.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ Sia $x \in X$ e sia $y \in X - \{x\}$ $\Rightarrow$

$\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U - V$ e $y \in V - U$

$\Rightarrow$ $y \in V \subset X - \{x\}$. Quindi $X - \{x\}$ aperto in X $\Rightarrow$ $\{x\}$ chiuso in X, $\forall\, x \in X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $x, y \in X$, $x \neq y$ $\rightsquigarrow$ $U = X - \{y\}$, $V = X - \{x\}$ sono aperti in X e $x \in U - V = \{x\}$, $y \in V - U = \{y\}$.

OSS 1) $T_4 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T_3 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T_2 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} T_1$

2) Metrizzabile $\Rightarrow$ T_2. Infatti se (X, d) sp. metrico

$x \neq y \in X$ $\rightsquigarrow$ $r = \frac{1}{2} d(x, y) > 0$

$x \in B(x; r)$, $y \in B(y; r)$, $B(x; r) \cap B(y; r) = \emptyset$

Teorema Sia X uno spazio metrizzabile. Allora X è T_4.

Dim Abbiamo già osservato che X è T_2, quindi T_1. Siano $A, B \subset X$ chiusi non vuoti con $A \cap B = \phi$. Sia $d : X \times X \to \mathbb{R}$ una distanza che induce la topologia di X $\rightsquigarrow$

A e B chiusi disgiunti $\Rightarrow d(a, B) > 0$ e $d(b, A) > 0$ $\forall a \in A, \forall b \in B$.

$$U = \bigcup_{a \in A} B\left(a, \tfrac{1}{2} d(a, B)\right) \supset A$$

$$V = \bigcup_{b \in B} B\left(b, \tfrac{1}{2} d(b, A)\right) \supset B$$

U e V sono aperti in X.

$x \in U \cap V \Rightarrow \exists\, a \in A, b \in B$ t.c.

$$x \in B\left(a, \tfrac{1}{2} d(a, B)\right) \cap B\left(b, \tfrac{1}{2} d(b, A)\right)$$

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{1}{2} d(a, B) + \frac{1}{2} d(b, A)$$

$$\leq \frac{1}{2} d(a, b) + \frac{1}{2} d(b, a) = d(a, b) \quad \text{impossibile}$$

$\Rightarrow U \cap V = \phi$.

Esempi 1) $\mathbb{R}^n$ è T_4 (e quindi T_2) perché è metrizzabile. Così pure per S^n, B^n, T^n.

2) $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{C}P^n$ sono T_2: $\forall\ 0 \le i \le j \le n$ consideriamo

$$\varphi_{ij} : \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_{ij}([x_0, \dots, x_n]) = \frac{x_i x_j}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$\forall\ [x] \neq [y] \in \mathbb{R}P^n\ \exists\ i,j$ t.c. $\varphi_{ij}([x]) \neq \varphi_{ij}([y])$
$\Longrightarrow T_2$ $\boxed{E}$

Nel caso complesso $\psi_{ij}([z_0, \dots, z_n]) = \dfrac{z_i \bar{z}_j}{|z_0|^2 + \dots + |z_n|^2}$

In seguito mostreremo che $\mathbb{R}P^n$ e $\mathbb{C}P^n$ sono metrizzabili (quindi T_4).

Proprietà topologiche

Def Una proprietà $\mathcal{P}$ di spazi topologici è detta proprietà topologica se $\forall\ X, Y$ spazi top. t.c. $X \cong Y$, X ha $\mathcal{P} \Leftrightarrow Y$ ha $\mathcal{P}$
$\Leftrightarrow \mathcal{P}$ è invariante a meno di omeomorfismi.

OSS T_1, T_2, T_3, T_4 e metrizzabilità sono proprietà topologiche $\boxed{E}$

Ereditarietà

Def Una proprietà topologica P è detta essere ereditaria se $\forall$ spazio top. X, X ha P e $Y \subset X$ è un sottospazio $\Rightarrow$ Y ha P.

Teorema T_1 e T_2 sono proprietà topologiche ereditarie.

Dim $\boxed{E}$

Nota La metrizzabilità è ereditaria.
T_4 non è ereditaria (dimostreremo più avanti).