Spazi metrici e funzioni continue

1. Determinare interno, frontiera, chiusura e punti di accumulazione sia dei seguenti insiemi che dei complementari.
    - $[2,4],]3,5], [3,6[\setminus\{4\}$
    - $\mathbb{Q}\cap[0,1], [-1,1]\setminus\mathbb{Q}$
    - $\{\frac{1}{n}, n\in\mathbb{N}\}$
    - $\{\frac{m\sqrt{3}}{n}, m\in\mathbb{N}, n\in\mathbb{N}^*\}$
2. Determinare chiusura parte interna e frontiera dei seguenti insiemi:
    - $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\geq 0, y>-1\}$
    - $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+|y|<1\}$
    - $C=\{x\in R : \frac{|x+3|}{x-1}>2\}$
3. Dire dove le seguenti funzioni sono continue e dimostrare esplicitamente la continuità nei punti indicati:
    - $f(x)=x^2$, in x=3
    - $f(x)=|x-2|$, in x=0
4. Sia $f(x)$ una funzione tale che:

    $$|f(x)|\leq x^2$$

    Dimostrare che f(x) è continua in 0.
5. Definendo con $\lfloor x\rfloor$ la parte intera inferiore di x, ovvero il più grande intero minore di x, dire dove la funzione

    $$f(x)=\lfloor x\rfloor$$

    è continua e dove non lo è. Verificare nei punti di non continuità che la definizione non è rispettata.
6. Dire dove la funzione

    $$f(x)=x-\lfloor x\rfloor$$

    è continua e dove non lo è. Verificare nei punti di non continuità che la definizione non è rispettata.

Soluzioni

1.
    - $Int([2;4])=(2;4)$
      $\partial([2;4])=\{2,4\}$
      $\overline{[2;4]}=[2;4]$
      Punti di accumulazione di [2;4]=[2; 4]

- $Int(]3;5]) = (3;5)$
  $\partial(]3;5]) = \{3,5\}$
  $\overline{[3;5]} = [3;5]$ di accumulazione di]3;5]=[3; 5]
- $Int([3;6[\setminus\{4\}) = (3;4) \cup (4;6)$
  $\partial([3;6[\setminus\{4\}) = \{3,6,4\}$
  $\overline{[3;6[\setminus\{4\}} = [3;6]$
  Punti di accumulazione di $[3;6[\setminus\{4\} = [3;6]$
- $Int(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = \emptyset$
  $\partial(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = [0,1]$
  $\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = [0;1]$
  Punti di accumulazione di $\mathbb{Q} \cap [0,1] = [0,1]$
- $Int([-1,1]\setminus\mathbb{Q}) = \emptyset$
  $\partial([-1,1]\setminus\mathbb{Q}) = [-1,1]$
  $\overline{[-1,1]\setminus\mathbb{Q}} = [-1;1]$
  Punti di accumulazione di $[-1,1]\setminus\mathbb{Q} = [-1,1]$
- $Int(\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}) = \emptyset$
  $\partial(\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}) = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
  $\overline{\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}} = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
  Punti di accumulazione di $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$
- L'insieme si può riscrivere come $\{k\sqrt{3}, k \in \mathbb{Q}\}$, e si dimostra che è un insieme denso in $\mathbb{R}$:

  $$\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0, \exists m, n \in \mathbb{Z} : |x - \frac{m\sqrt{3}}{n}| < \varepsilon$$

  Infatti dalla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ abbiamo che:

  $$\forall y \in \mathbb{R},\ \forall \overline{\varepsilon} > 0, \exists p, q \in \mathbb{Z} : |y - \frac{p}{q}| < \overline{\varepsilon}$$

  Quindi per dimostrare la prima affermazione dalla seconda, dato $x \in R$ considero $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ e ricavo p, q dalla densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, con $\overline{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$, ovvero trovo p, q tali che $|y - \frac{p}{q}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}$. Moltiplicando entrambi i membri di questa scrittura per $\sqrt{3}$ ottengo

  $$|x - \sqrt{3}\frac{p}{q}| < \varepsilon$$

  che dimostra la densità dell'insieme dato in $\mathbb{R}$.
  Quindi tutti i punti sono di accumulazione, tutto $\mathbb{R}$ è frontiera dell'insieme e nessun punto è interno, infine la chiusura coincide con $\mathbb{R}$.

2.

3. - $f(x)$ è continua in 3 se

     $$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x - 3| < \delta \implies |f(x) - f(3)| < \varepsilon.$$

In $x = 3, f(3) = 9$, proviamo che la condizione di continuità è verificata: fissato $\varepsilon > 0$, cerco $\delta > 0$: $\forall x : |x-3| < \delta \implies |x^2-9| < \varepsilon$. Per farlo esplicito $|x^2-9| < \varepsilon$: risolvendo la disequazione si ottengono le seguenti soluzioni

$$|x^2-9| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x^2-9 < \varepsilon$$

$$\begin{cases} x^2-9 < \varepsilon \\ x^2-9 > -\varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} -\sqrt{9+\varepsilon} < x < \sqrt{9+\varepsilon} \\ x > \sqrt{9-\varepsilon} \lor x < -\sqrt{9-\varepsilon} \end{cases} \iff$$

$$(\sqrt{9-\varepsilon} < x < \sqrt{9+\varepsilon}) \lor (-\sqrt{9+\varepsilon} < x < -\sqrt{9-\varepsilon})$$

Il primo dei due intervalli è un intorno di 3, ed è quindi quello che permette di verificare la definizione di continuità.

- $f(x)$ è continua in 0 se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x| < \delta \implies |f(x) - f(0)| < \varepsilon.$$

In $x = 0, f(0) = 2$, proviamo che la condizione di continuità è verificata: fissato $\varepsilon > 0$, cerco $\delta > 0$: $\forall x : |x| < \delta \implies |2 - |x-2|| < \varepsilon$. Per farlo esplicito $|2-|x-2|| < \varepsilon$: risolvendo la disequazione si ottengono le seguenti soluzioni

$$|2-|x-2|| < \varepsilon \iff -\varepsilon < 2-|x-2| < \varepsilon$$

$$\begin{cases} 2-|x-2| < \varepsilon \\ 2-|x-2| > -\varepsilon \end{cases} \iff \begin{cases} |x-2| < 2+\varepsilon \\ |x-2| > 2-\varepsilon \end{cases}$$

Ora per concludere bisognerebbe considerare i due casi, x>2 e x<2 per esplicitare il valore assoluto, ma chiaramente nel caso x>2, non si ha un intorno di zero. Quindi consideriamo solo il caso x<2: la soluzione in quel caso è

$$-\varepsilon < x < \varepsilon$$

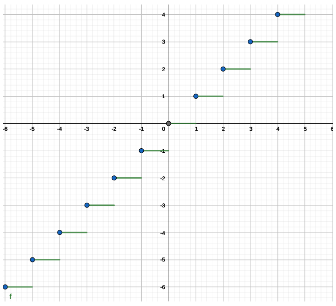
Quindi in questo caso, abbiamo esplicitamente: $\delta = \varepsilon$.

4. Per ipotesi $|f(x)| \leq x^2$ e questo permette di ricavare immediatamente il valore della funzione in 0: $|f(0)| \leq 0 \implies f(0) = 0$, quindi per dimostrare la continuità in 0 vogliamo dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x : |x| < \delta \implies |f(x)| < \varepsilon.$$

Siccome $|f(x)| \leq x^2$, per avere $|f(x)| < \varepsilon$, basta scegliere $x \in (-\sqrt{\varepsilon}; \sqrt{\varepsilon})$. É importante notare che questo verifica la definizione perchè in generale la condizione data per ipotesi ci dice che se $y < x$, allora $|f(y)| < y^2 < x^2$, so $\forall x \in (-\sqrt{\varepsilon}; \sqrt{\varepsilon})$, $|f(x)| < \varepsilon$.

5. La funzione è quella rappresentata in figura. Si vede quindi che le discontinuità sono in tutti gli interi: visivamente ci si rende conto che $x \in (n; n+1) \implies f(x) = n$, mentre $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = n$. Dimostriamo quindi



formalmente la presenza della discontinuità in questi punti, e invece verifichiamo la continuità in tutti gli altri:

$$\forall x \in (n; n+1), n \in \mathbb{Z}, \forall yin \in (n; n+1) f(x) = f(y)$$

Quindi questo vuol dire che comunque scelga un valore non in $\mathbb{Z}$, l'intervallo della forma $(n; n+1)$ in cui questo è contenuto, è un intorno che verifica la definizione di continuità: $|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Troviamo quindi un delta indipendente da ε in questo caso (questo è dovuto al fatto che la funzione in questo intervallo considerato è costante).

Dimostriamo invece la discontinuità per $n \in \mathbb{Z}$: dobbiamo quindi per prima cosa scrivere la negazione della definizione di continuità e poi provarla:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 |x - n| < \delta \implies |f(x) - f(n)| > \varepsilon$$

Ovvero nel caso specifico:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 |x - n| < \delta \implies |\lfloor x \rfloor - \lfloor n \rfloor| > \varepsilon$$

Esplicitando:

$$|\lfloor x \rfloor - \lfloor n \rfloor| = |\lfloor x \rfloor - n|$$

Quindi possiamo scegliere qualsiasi $\varepsilon < 1$, per fissare la scrittura scegliamo $\varepsilon = 1/2$ e avremo che:

$$|\lfloor x \rfloor - n| > 1/2 \quad \forall x \in (n-1; n)$$

6. Si risolve con ragionamenti analoghi a quelli usati per l'esercizio 5, di seguito il grafico della funzione: