Esempio $T_1 \not\Rightarrow T_2$

Topologia cofinita: X insieme qualunque

$U \subset X$ aperto $\Leftrightarrow$ $X - U$ finito

(i chiusi non banali sono i sottoinsiemi finiti di X)

X finito e cofinito $\Rightarrow$ X discreto $\Rightarrow$ metrizzabile

X infinito e cofinito $\Rightarrow$ X è T_1 ma non T_2

Infatti i punti sono chiusi ($\Leftrightarrow T_1$) ma

se $U, V \subset X$ aperti con $U \neq \emptyset$ e $V \neq \emptyset$

$\Rightarrow U \cap V \neq \emptyset \quad \Rightarrow X$ non T_2.

Prop T_3 è ereditaria.

Dim X spazio T_3, $\emptyset \neq Y \subset X$

$y \in Y$, $A \subset Y$ chiuso in Y, $y \notin A \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, A' \subset X$ chiuso in X t.c.

$$A = \tilde{A} \cap Y$$

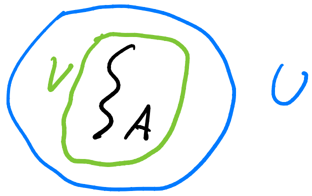
$\Rightarrow y \notin \tilde{A}$. Quindi esistono $U, V \subset X$

aperto t.c. $U \cap V = \emptyset$, $y \in U$, $\tilde{A} \subset V$

$\Rightarrow U' = U \cap Y$, $V' = V \cap Y$ aperti in Y

$U' \cap V' = \emptyset$, $y \in U'$, $A \subset V'$.

Teorema Sia X uno spazio T_4 e sia $A \subset X$ un chiuso non vuoto. Allora per ogni aperto $U \subset X$ t.c. $A \subset U$ esiste un aperto $V \subset X$ t.c. $A \subset V \subset Cl_X V \subset U$.



Dim Se $U = X$ possiamo $V = U$. Sia $U \neq X$.

$B = X - U$ chiuso non vuoto $\rightsquigarrow$ $V, W \subset X$ aperti t.c. $A \subset V$, $B \subset W$, $V \cap W = \phi$
$\Rightarrow V \subset (X - W) \subset U \Rightarrow A \subset V \subset Cl_X V \subset U$
perché $X - W$ è chiuso in X.

Lemma di Urysohn

Sia X uno spazio metrizzabile, e siano $A_0, A_1 \subset X$ due chiusi non vuoti con $A_0 \cap A_1 = \emptyset$. Allora esiste una funzione continua $f : X \to [0,1]$ tale che

$$A_0 = f^{-1}(0) \quad e \quad A_1 = f^{-1}(1).$$

Dim $d : X \times X \to \mathbb{R}$ distanza che induce la topologia di X.

$$f : X \to [0,1]$$

$$f(x) = \frac{d(x, A_0)}{d(x, A_0) + d(x, A_1)}$$

Si vede facilmente che f soddisfa la tesi.

Nota Il lemma di Urysohn vale più in generale per spazi T_4, ma la dimostrazione è più difficile.

Corollario

Sia X metrizzabile e $A \subset X$ chiuso. Allora esiste $f : X \to [0,1]$ continua tale che

$$A = f^{-1}(0).$$

Dim Se $A = \emptyset$ basta porre $f = 1$ (costante). Se $A = X$, poniamo $f = 0$.

Se $A \neq \emptyset$, $A \neq X$, sia $b \in X - A$.

Per il lemma di Urysohn esiste $f : X \to [0,1]$ continua t.c. $A = f^{-1}(0)$, $\{b\} = f^{-1}(1)$.

Teorema Sia X uno spazio topologico. Allora X è di Hausdorff se e solo se la diagonale

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subset X \times X$$

è chiusa in $X \times X$.

Dim $\boxed{\Rightarrow}$ $(x,y) \in (X \times X) - \Delta \Rightarrow x \neq y$

$\Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow (x,y) \in U \times V \subset (X \times X) - \Delta$.

$\boxed{\Leftarrow}$ $x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow (x,y) \in (X \times X) - \Delta$ aperto $\Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c.

$$(x,y) \in \underbrace{U \times V}_{\text{aperto basico}} \subset (X \times X) - \Delta \Rightarrow U \cap V = \emptyset.$$

Teorema Sia X uno spazio topologico e sia Y uno spazio di Hausdorff. Consideriamo due applicazioni continue $f_1, f_2 : X \to Y$. Allora

$$A = \{x \in X \mid f_1(x) = f_2(x)\}$$ è chiuso in X.

Dim $F : X \to Y \times Y$, $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ continua $\Rightarrow F^{-1}(\Delta) = A$ chiuso in X.

OSS Definizione di chiusi mediante equazioni continue.