

Corso di
Analisi delle strutture:
alcuni argomenti
relativi alla
dinamica
delle strutture

EQUAZIONE DEL MOTO ARMONICO

Dato un sistema non smorzato, costituito da una massa m e da una molla con comportamento elastico lineare caratterizzata da rigidezza k , in assenza di forzanti esterne l'equazione di equilibrio risulta essere: $m \ddot{x} + k x = 0$.

Dividendo per m , si può porre: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, con $\omega = (k / m)^{1/2}$.

Si ricava quindi la soluzione (*integrale generale*)

$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, ove ω rappresenta la **PULSAZIONE NATURALE** del sistema.

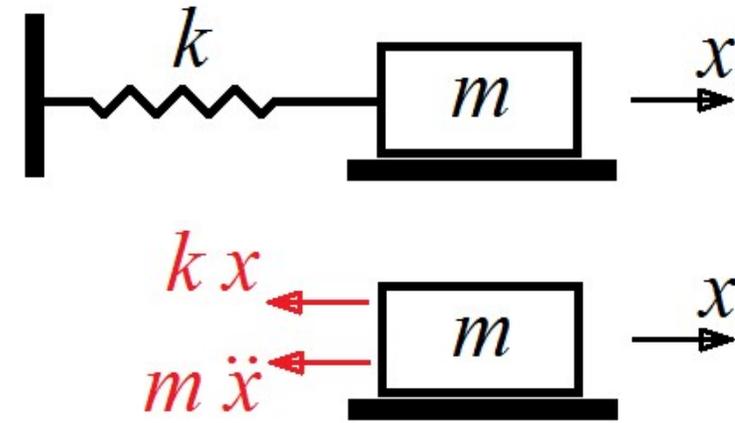
Da qui si deducono il periodo $T = 2 \pi / \omega$ e la frequenza naturale $f = 1 / T$.

Le costanti A e B vengono determinate imponendo le condizioni al contorno. Si ricava quindi:

$A = x_0$, dovendo risultare $x(t=0) = A = x_0 =$ spostamento iniziale al tempo $t=0$,

$B = \dot{x}_0 / \omega$, dovendo risultare $\dot{x}(t=0) = B \omega = \dot{x}_0 =$ velocità iniziale al tempo $t=0$.

In particolare, si ottiene B considerando l'equazione $\dot{x}(t) = -A \omega \sin(\omega t) + B \omega \cos(\omega t)$.



MOTO ARMONICO: ESPRESSIONI ALTERNATIVE DI $x(t)$ [1/2]

Data l'equazione differenziale $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ e la relativa soluzione

$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, imponendo le condizioni al contorno risulta:

$$A = x_0, \text{ dovendo risultare } x(t=0) = A = x_0$$

$$B = \dot{x}_0 / \omega, \text{ dovendo risultare } \dot{x}(t=0) = B \omega = \dot{x}_0,$$

$$\text{essendo } \dot{x}(t) = -A \omega \sin(\omega t) + B \omega \cos(\omega t)$$

D'altra parte, $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$. Si può quindi porre:

$x(t) = C \sin(\omega t + \theta)$ con C tale che $C \sin(\omega t) \cos \theta = B \sin(\omega t)$ e $C \cos(\omega t) \sin \theta = A \cos(\omega t)$

Deve pertanto risultare $C \cos \theta = B$, $C \sin \theta = A$, $\text{tg } \theta = A / B$.

Questo implica: $C^2 = A^2 + B^2$ e quindi $C = ((x_0)^2 + (\dot{x}_0)^2 / \omega^2)^{1/2}$

$$\theta = \text{arctg}(A / B) = \text{arctg}(x_0 \omega / \dot{x}_0)$$

MOTO ARMONICO: ESPRESSIONI ALTERNATIVE DI $x(t)$ [2/2]

Data l'equazione differenziale $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ e la relativa soluzione

$x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, imponendo le condizioni al contorno risulta:

$$A = x_0, \text{ dovendo risultare } x(t=0) = A = x_0$$

$$B = \dot{x}_0 / \omega, \text{ dovendo risultare } \dot{x}(t=0) = B \omega = \dot{x}_0,$$

$$\text{essendo } \dot{x}(t) = -A \omega \sin(\omega t) + B \omega \cos(\omega t)$$

D'altra parte, $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$. Si può quindi porre:

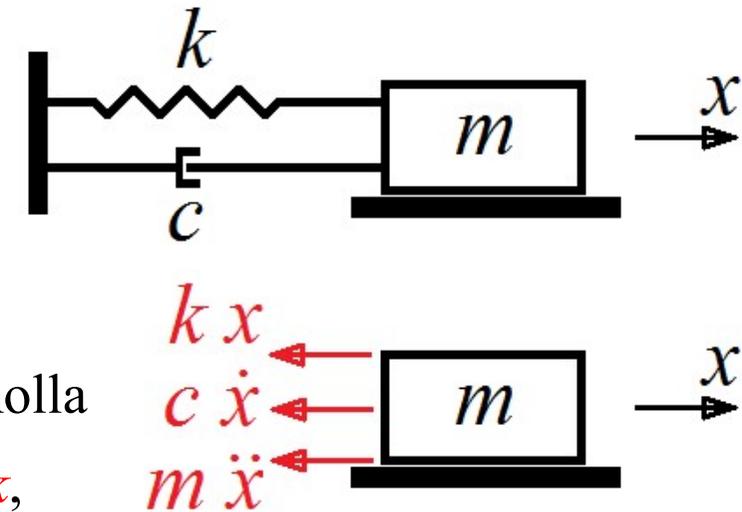
$$x(t) = C \cos(\omega t - \varphi) \text{ con } C \text{ tale che } C \sin(\omega t) \sin \varphi = B \sin(\omega t) \text{ e } C \cos(\omega t) \cos \varphi = A \cos(\omega t)$$

$$\text{Deve pertanto risultare } C \sin \varphi = B, \quad C \cos \varphi = A, \quad \text{tg } \varphi = B / A.$$

$$\text{Questo implica: } C^2 = A^2 + B^2 \text{ e quindi } C = ((x_0)^2 + (\dot{x}_0)^2 / \omega^2)^{1/2}$$

$$\varphi = \text{arctg}(B / A) = \text{arctg}((\dot{x}_0 / (x_0 \omega)))$$

SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ (Cenni introduttivi)



Dato un sistema costituito da una massa m , da uno smorzatore caratterizzato dal **COEFFICIENTE DI SMORZAMENTO** c e da una molla con comportamento elastico lineare caratterizzata da rigidezza k , in assenza di forzanti esterne l'equazione di equilibrio si presenta nella forma:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0.$$

Assumendo una soluzione del tipo $x(t) = A e^{pt}$, si ricava $\dot{x}(t) = A p e^{pt}$ e $\ddot{x}(t) = A p^2 e^{pt}$.

Si ottiene quindi $m A p^2 e^{pt} + c A p e^{pt} + k A e^{pt} = 0$, che implica $m p^2 + c p + k = 0$.

Di conseguenza deve risultare

$$\begin{aligned} p &= (-1/2c/m) \pm (c^2 - 4km)^{1/2} / (2m) \\ &= (-1/2c/m) \pm (c^2 / (4m^2) - k/m)^{1/2} \end{aligned}$$

SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ (Caso dello *smorzamento critico* [1/3])

Una prima soluzione possibile è quella per cui $p = -1/2 c / m = -1/2 c_{cr} / m$,
essendo c_{cr} (*smorzamento critico*) quel valore del parametro c che rende nullo il termine
 $c^2 / (4m^2) - k/m$. Risulta pertanto $c_{cr} = 2 (k m)^{1/2} = 2 \omega m$, essendo $\omega = (k/m)^{1/2}$.

L'integrale generale diventa quindi $x(t) = A e^{pt} = A e^{(-1/2 c_{cr} / m)t} = A e^{-\omega t}$.

Tuttavia, quando $c=c_{cr}$, l'equazione differenziale è soddisfatta anche dalla funzione

$x(t) = B t e^{-\omega t}$ e dalle sue derivate

$$\dot{x}(t) = B e^{-\omega t} - B t \omega e^{-\omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -B \omega e^{-\omega t} - B \omega e^{-\omega t} + B t \omega^2 e^{-\omega t}$$

SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

(Caso dello *smorzamento critico* [2/3])

Sostituendo la nuova espressione di $x(t)$ e delle sue derivate nell'equazione differenziale

$m \ddot{x} + c \dot{x} + k = m \ddot{x} + c_{cr} \dot{x} + k = 0$, si dovrebbe ottenere:

$$m (-2 B \omega e^{-\omega t} + B t \omega^2 e^{-\omega t}) + c_{cr} (B e^{-\omega t} - B t \omega e^{-\omega t}) + k B t e^{-\omega t} = 0.$$

Si ricava quindi $m (-2 B \omega e^{-\omega t} + B t \omega^2 e^{-\omega t}) + c_{cr} (B e^{-\omega t} - B t \omega e^{-\omega t}) + k B t e^{-\omega t} = 0$.

Alternativamente si può scrivere $(m \omega^2 - c_{cr} \omega + k) B t e^{-\omega t} + (-m 2 \omega + c_{cr}) B e^{-\omega t} = 0$.

Essendo $c_{cr} = 2\omega m$, si constata subito che il secondo termine fra parentesi è effettivamente nullo.

Per lo stesso motivo, il primo termine fra parentesi diventa $-\omega^2 m + k = 0$.

Di conseguenza, pure questo termine è nullo, essendo $\omega = (k/m)^{1/2}$.

SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

(Caso dello *smorzamento critico* [3/3])

Quando $c=c_{cr}=2\omega m$, l'integrale generale dell'equazione differenziale $m\ddot{x} + c\dot{x} + k = 0$ diventa quindi

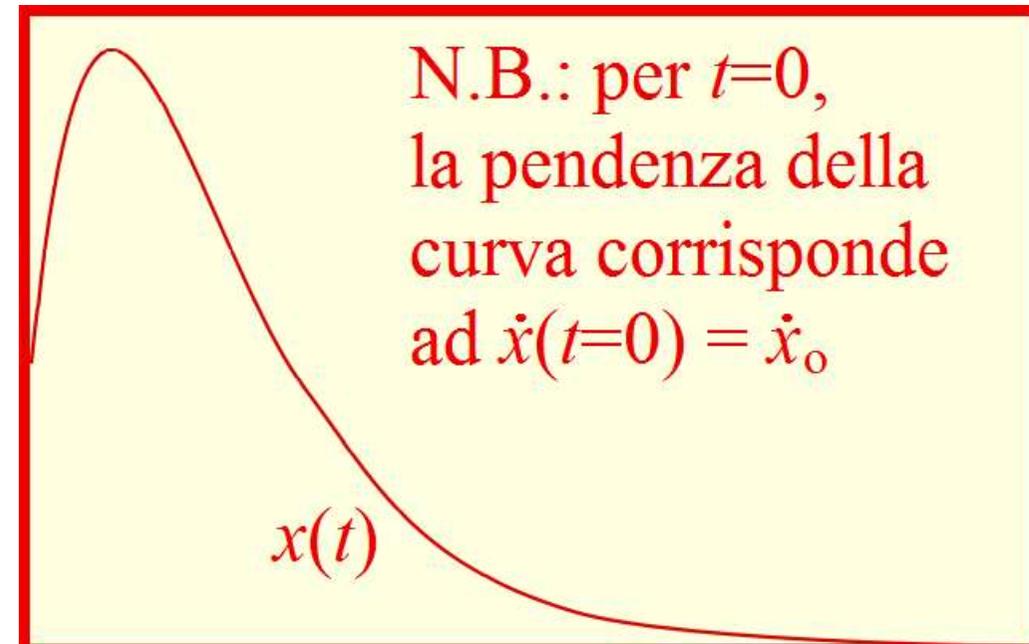
$$x(t) = A e^{pt} + B t e^{pt} \text{ con } p = -\omega.$$

Considerando l'istante $t = 0$, si ottiene $A = x_0$.

Essendo poi $\dot{x}(t) = x_0 p e^{pt} + B e^{pt} + B t p e^{pt}$,
si ricava

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = x_0 p + B = -x_0 \omega + B,$$

da cui: $B = \dot{x}_0 + x_0 \omega$.



SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

(Caso dei sistemi *sovrasmorzati*)

Quando il termine $(c^2 - 4km)$ risulta essere positivo, l'integrale generale dell'equazione differenziale $m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0$ si presenta nella forma $x(t) = A e^{p_1 t} + B e^{p_2 t}$, ove:

$$p_1 = (-1/2c/m) - (c^2 / (4m^2) - k/m)^{1/2} \quad \text{e} \quad p_2 = (-1/2c/m) + (c^2 / (4m^2) - k/m)^{1/2}.$$

La risposta del sistema non risulta caratterizzata da oscillazioni e la funzione $x(t)$ si presenta con un grafico analogo a quello relativo ai sistemi caratterizzati dal valore critico dello smorzamento.

SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

(Caso dei sistemi *sottosmorzati* [1/3])

Quando il termine $(c^2 - 4km)$ è negativo, l'integrale generale dell'equazione differenziale

$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = 0$ si presenta nella forma $x(t) = A^* e^{p_1 t} + B^* e^{p_2 t}$, ove:

$$p_1 = (-1/2c/m) - i \omega_D \quad \text{e} \quad p_2 = (-1/2c/m) + i \omega_D,$$

$$\text{avendo posto } \omega_D = \left(k/m - c^2/(4m^2) \right)^{1/2}$$

Introducendo il **FATTORE DI SMORZAMENTO** $\xi = c/c_{cr}$, si ricava infatti $\omega_D = \omega (1 - \xi^2)^{1/2}$.

A tale risultato si perviene in quanto risulta $k/m - c^2/(4m^2) = k/m - \xi^2 c_{cr} / (4m^2) = \omega^2 - \xi^2 \omega^2$,

essendo $\omega^2 = k/m$ e $c_{cr} = 2\omega m$.

SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

(Caso dei sistemi *sottosmorzati* [2/3])

Dunque, l'equazione differenziale $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$ ammette l'integrale generale

$$x(t) = A^* e^{-\zeta\omega t} e^{-i\omega_D t} + B^* e^{-\zeta\omega t} e^{i\omega_D t} \quad \text{quando } \zeta < 1.$$

D'altra parte, $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$. Si può quindi porre:

$$\begin{aligned} x(t) &= A^* e^{-\zeta\omega t} (\cos \omega_D t - i \sin \omega_D t) + B^* e^{-\zeta\omega t} (\cos \omega_D t + i \sin \omega_D t) \\ &= e^{-\zeta\omega t} [(A^* + B^*) \cos \omega_D t + i(-A^* + B^*) \sin \omega_D t] \\ &= e^{-\zeta\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t). \end{aligned}$$

Si noti che l'ultimo passaggio si basa sulle seguenti relazioni:

$$A^* = a_1 + i a_2 \quad \text{e} \quad B^* = b_1 + i b_2, \quad \text{da cui si ricava}$$

$$A^* + B^* = (a_1 + b_1) + i(a_2 + b_2) \quad \text{e} \quad i(-A^* + B^*) = (-a_1 + b_1)i - (-a_2 + b_2).$$

$$\text{Pertanto, } A = A^* + B^* \quad \text{e} \quad B = i(-A^* + B^*) \quad \text{REALI se } a_2 = -b_2 \quad \text{e} \quad a_1 = b_1.$$

SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ

(Caso dei sistemi *sottosmorzati* [3/3])

Dato l'integrale generale $x(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$,

le consuete condizioni iniziali permettono di ricavare le costanti A e B .

Risulta quindi $A = x_0 = x(t=0)$ e $B = (\dot{x}_0 + x_0 \omega \zeta) / \omega_D$,

dovendo essere, in particolare, $\dot{x}_0 = \dot{x}(t=0) = -\zeta \omega x_0 + B \omega_D$,

in quanto si ha: $\dot{x}(t) = -\zeta \omega e^{-\zeta\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) + e^{-\zeta\omega t} \omega_D (-A \sin \omega_D t + B \cos \omega_D t)$.

Con procedura analoga a quanto visto nel caso del moto armonico, l'integrale generale

$x(t) = e^{-\zeta\omega t} (x_0 \cos \omega_D t + (1 / \omega_D) (\dot{x}_0 + x_0 \omega \zeta) \sin \omega_D t)$ può essere riscritto nella forma:

$$x(t) = C e^{-\zeta\omega t} \cos(\omega_D t - \alpha) \quad \text{con} \quad C = \left((x_0)^2 + (\dot{x}_0 + x_0 \omega \zeta)^2 / (\omega_D)^2 \right)^{1/2}$$
$$\alpha = \text{arctg} \left((\dot{x}_0 + x_0 \omega \zeta) / (\omega_D x_0) \right).$$

DECREMENTO LOGARITMICO

Nel caso delle oscillazioni libere smorzate si ha un moto oscillatorio non periodico. Tuttavia, ad ogni intervallo di tempo $\Delta T_D = 2\pi / \omega_D$ si può individuare un punto della funzione $x(t)$ in corrispondenza del quale risulti $\cos(\omega_D t - \alpha) = 1$.

Ciascuno di questi punti appartiene alla curva $y(t) = C e^{-\zeta \omega t}$. Scelto uno qualsiasi di tali punti (per esempio, quello all'istante $t=t_1$), si ha $y(t_1) = x(t_1) = C e^{-\zeta \omega t_1}$. Considerando l'istante $t=t_2=t_1+\Delta T_D$, si ha invece $y(t_2) = x(t_2) = C e^{-\zeta \omega t_2}$. Si può quindi definire il decremento logaritmico

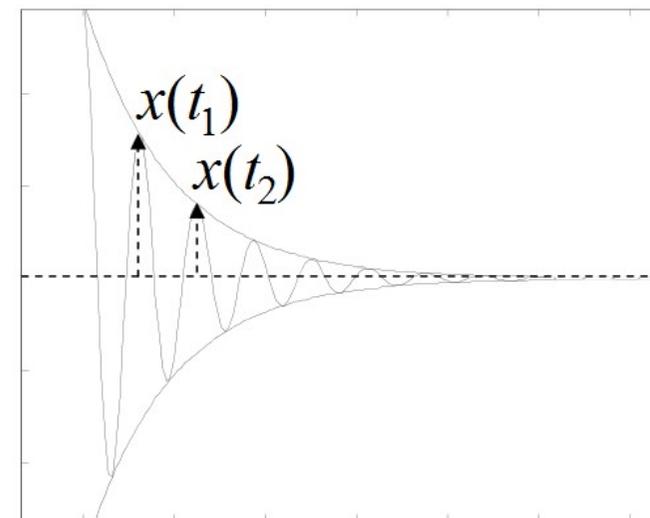
$$\delta = \ln(x(t_1) / x(t_2)) = \zeta \omega \Delta T_D.$$

Questo può essere riscritto nella forma

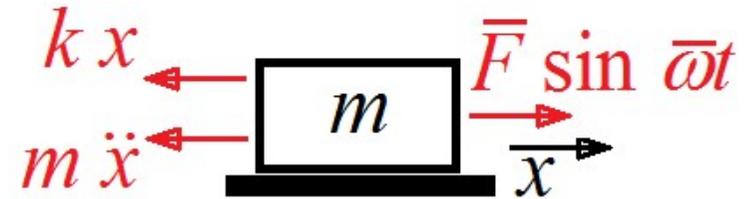
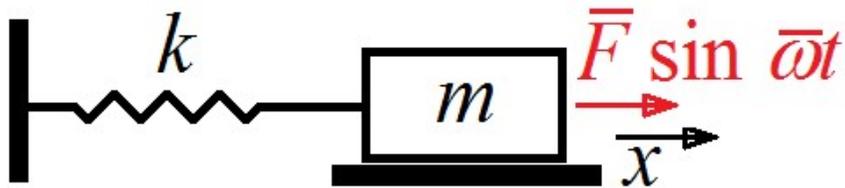
$$\delta = \zeta \omega 2\pi / \omega_D, \text{ con } \omega_D = (1 - \zeta^2).$$

Risulta pertanto $\delta \approx 2\pi \zeta$ per $\zeta^2 \ll 1$

(come di regola avviene, poiché solitamente si ha $\zeta < 0.2$).



FORZANTE ARMONICA IN ASSENZA DI SMORZAMENTO



Dato un sistema non smorzato, costituito da una massa m e da una molla con comportamento elastico lineare caratterizzata da rigidezza k , in presenza di una forzante $F(t) = \bar{F} \sin(\bar{\omega}t)$, l'equazione di equilibrio risulta essere: $m \ddot{x} + kx = \bar{F} \sin(\bar{\omega}t)$.

L'integrale generale della omogenea associata è quindi $x_G(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, mentre l'integrale particolare è $x_p(t) = \bar{x} \sin(\bar{\omega}t)$, da cui si ottiene: $\dot{x}_p(t) = \bar{x} \bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t)$, $\ddot{x}_p(t) = -\bar{x} \bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}t)$.

Sostituendo $x_p(t)$ e le sue derivate nell'equazione di equilibrio si ricava

$$-m \bar{x} \bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}t) + k \bar{x} \sin(\bar{\omega}t) = \bar{F} \sin(\bar{\omega}t),$$

da cui si deduce $\bar{x} = \bar{F} / (k - m \bar{\omega}^2)$.

FORZANTE ARMONICA E FENOMENO DELLA RISONANZA



Come si è visto, l'equazione $m \ddot{x} + kx = \bar{F} \sin(\bar{\omega}t)$ ammette come soluzione l'integrale particolare $x_p(t) = \bar{x} \sin(\bar{\omega}t)$ con $\bar{x} = \bar{F} / (k - m \bar{\omega}^2)$.

D'altra parte, $\omega^2 = k/m$, ovvero $m = k/\omega^2$.

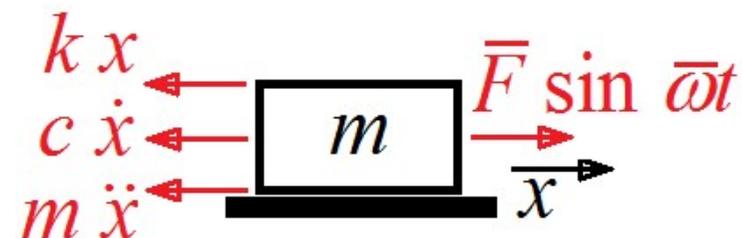
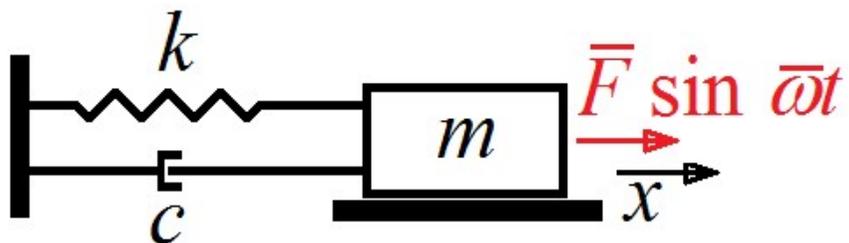
Da qui si deduce $k - m \bar{\omega}^2 = k - k \bar{\omega}^2 / \omega^2 = k(1 - r^2)$, avendo posto $r = \bar{\omega}/\omega$.

Si ricava quindi la soluzione: $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{\bar{F}/k}{1 - r^2} \sin(\bar{\omega}t)$.

Dunque, la risposta del sistema è data dalla sovrapposizione di due moti armonici.

Quando $\bar{\omega}$ tende ad ω , l'ampiezza dell'oscillazione tende ad infinito e si manifesta il fenomeno della **risonanza**.

FORZANTE ARMONICA IN PRESENZA DI SMORZAMENTO



Dato un sistema smorzato, costituito da una massa m e da una molla con comportamento elastico lineare caratterizzata da rigidità k , in presenza di una forzante $F(t) = \bar{F} \sin(\bar{\omega}t)$,

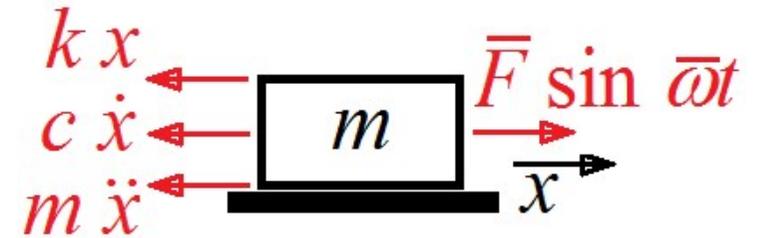
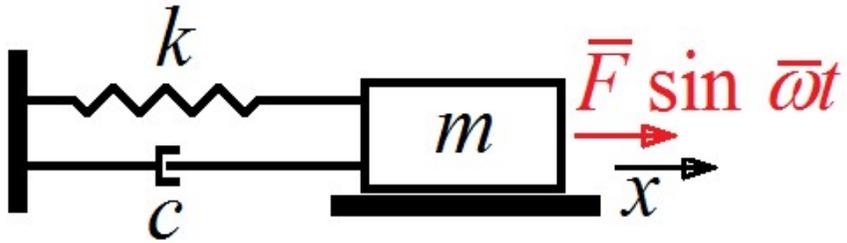
l'equazione di equilibrio risulta essere: $m \ddot{x} + c \dot{x} + kx = \bar{F} \sin(\bar{\omega}t)$.

L'**integrale generale** della omogenea associata è quindi $x_G(t) = e^{-\zeta\omega t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$, mentre l'**integrale particolare** è la **parte immaginaria** di $C e^{i\bar{\omega}t}$, come si vede in modo immediato se si interpreta la forzante come la parte immaginaria di $\bar{F} e^{i\bar{\omega}t}$.

Velocità ed accelerazione sono quindi la parte immaginaria di $C i \bar{\omega} e^{i\bar{\omega}t}$, $-C \bar{\omega}^2 e^{i\bar{\omega}t}$.

Sostituendo nell'equazione di equilibrio si ottiene $-m C \bar{\omega}^2 e^{i\bar{\omega}t} + c C i \bar{\omega} e^{i\bar{\omega}t} + k C e^{i\bar{\omega}t} = \bar{F} e^{i\bar{\omega}t}$, da cui si deduce $C = \bar{F} / (k - m \bar{\omega}^2 + i c \bar{\omega})$.

IL PARAMETRO C NELLA FUNZIONE $C e^{-i\vartheta}$



L'**integrale particolare** dell'equazione differenziale che governa il moto di un sistema smorzato ad un grado di libertà risulta essere la **parte immaginaria** di $C e^{i\bar{\omega}t}$, con $C = \bar{F} / (k - m \bar{\omega}^2 + i c \bar{\omega})$.

Da qui si può ricavare anche $C = \bar{F} e^{-i\theta} / ((k - m \bar{\omega}^2)^2 + (c \bar{\omega})^2)^{1/2}$, con $\theta = \text{arctg}(c \bar{\omega} / (k - m \bar{\omega}^2))$.

Risultando infatti $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, si può porre $\cos \theta = (k - m \bar{\omega}^2) / ((k - m \bar{\omega}^2)^2 + (c \bar{\omega})^2)^{1/2}$
e $\sin \theta = c \bar{\omega} / ((k - m \bar{\omega}^2)^2 + (c \bar{\omega})^2)^{1/2}$.

Dunque, l'**integrale particolare** $x_p(t)$, interpretato come la parte immaginaria di $C e^{i\bar{\omega}t}$, può essere espresso nella forma

$$x_p(t) = \text{I} \left[\bar{F} e^{i(\bar{\omega}t - \theta)} / ((k - m \bar{\omega}^2)^2 + (c \bar{\omega})^2)^{1/2} \right].$$

RISPOSTA DI UN SISTEMA SMORZATO AD UN GRADO DI LIBERTÀ SOGGETTO A FORZANTE ARMONICA



La soluzione dell'equazione differenziale $m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = \bar{F} \sin (\bar{\omega} t)$

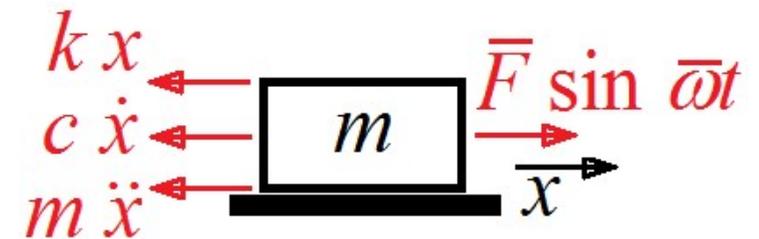
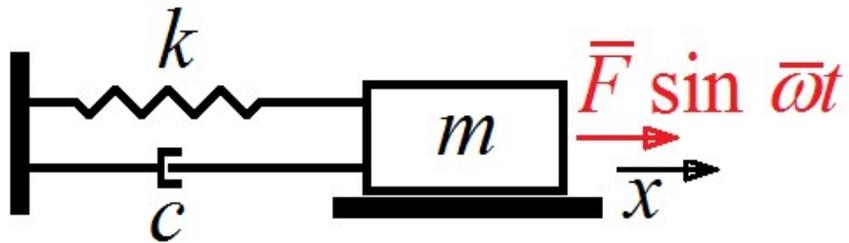
è ottenuta sommando l'integrale generale $x_G(t) = e^{-\zeta \bar{\omega} t} (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t)$

e la parte immaginaria di $\bar{F} e^{i(\bar{\omega} t - \theta)} / ((k - m \bar{\omega}^2)^2 + (c \bar{\omega})^2)^{1/2}$

con $\theta = \arctg (c \bar{\omega} / (k - m \bar{\omega}^2))$

A causa dello smorzamento, $x_G(t)$ interessa solo la fase iniziale (transitoria).

IL FATTORE DI AMPLIFICAZIONE DINAMICO



L'espressione $x_p(t) = \text{I} \left[\bar{F} e^{i(\bar{\omega}t-\theta)} / ((k-m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2)^{1/2} \right]$

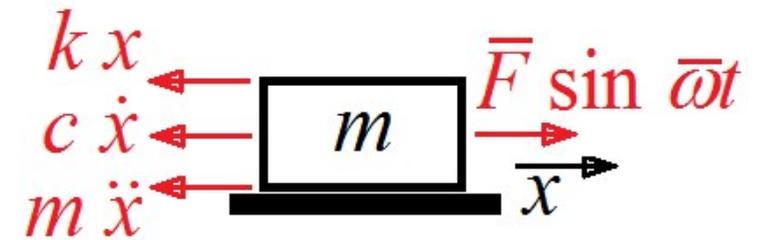
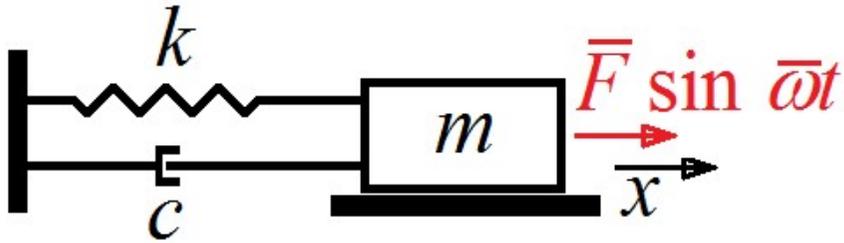
può essere riscritta nella forma

$$\begin{aligned}
 x_p(t) &= \text{I} \left[(\bar{F} / k) e^{i(\bar{\omega}t-\theta)} / ((1-m\bar{\omega}^2/k)^2 + (c\bar{\omega}/k)^2)^{1/2} \right] \\
 &= \text{I} \left[(\bar{F} / k) e^{i(\bar{\omega}t-\theta)} / ((1-\bar{\omega}^2/\omega^2)^2 + (\xi c_{cr} \bar{\omega}/k)^2)^{1/2} \right] \\
 &= \text{I} \left[(\bar{F} / k) e^{i(\bar{\omega}t-\theta)} / ((1-r^2)^2 + (\xi \cdot 2\omega m \cdot \bar{\omega}/k)^2)^{1/2} \right] \\
 &= \text{I} \left[(\bar{F} / k) e^{i(\bar{\omega}t-\theta)} / ((1-r^2)^2 + (2\xi\omega \cdot \bar{\omega}/\omega^2)^2)^{1/2} \right] \\
 &= \text{I} \left[(\bar{F} / k) e^{i(\bar{\omega}t-\theta)} / ((1-r^2)^2 + (2\xi r)^2)^{1/2} \right],
 \end{aligned}$$

ove $1 / ((1-r^2)^2 + (2\xi r)^2)^{1/2} = \chi = \text{fattore di amplificazione dinamico}$ [=1/(2\xi) se $\omega=\bar{\omega}$]

ed avendo posto, in particolare, $m/k=1/\omega^2$, $r=\bar{\omega}/\omega$, $c_{cr}=2\omega m$.

ANGOLO DI FASE



Nel caso delle vibrazioni forzate in presenza di smorzamento risulta:

$$x_p(t) = \text{I} \left[\bar{F} e^{i(\bar{\omega}t - \theta)} / ((k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2)^{1/2} \right], \text{ se } F(t) = \bar{F} \sin(\bar{\omega} t).$$

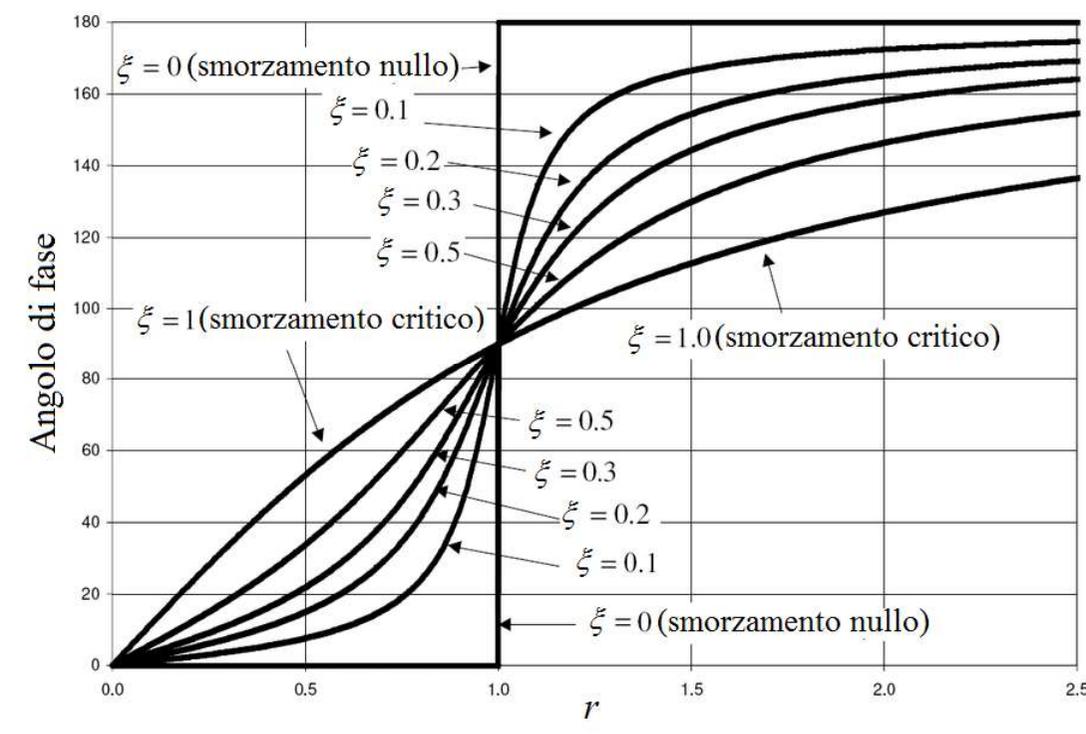
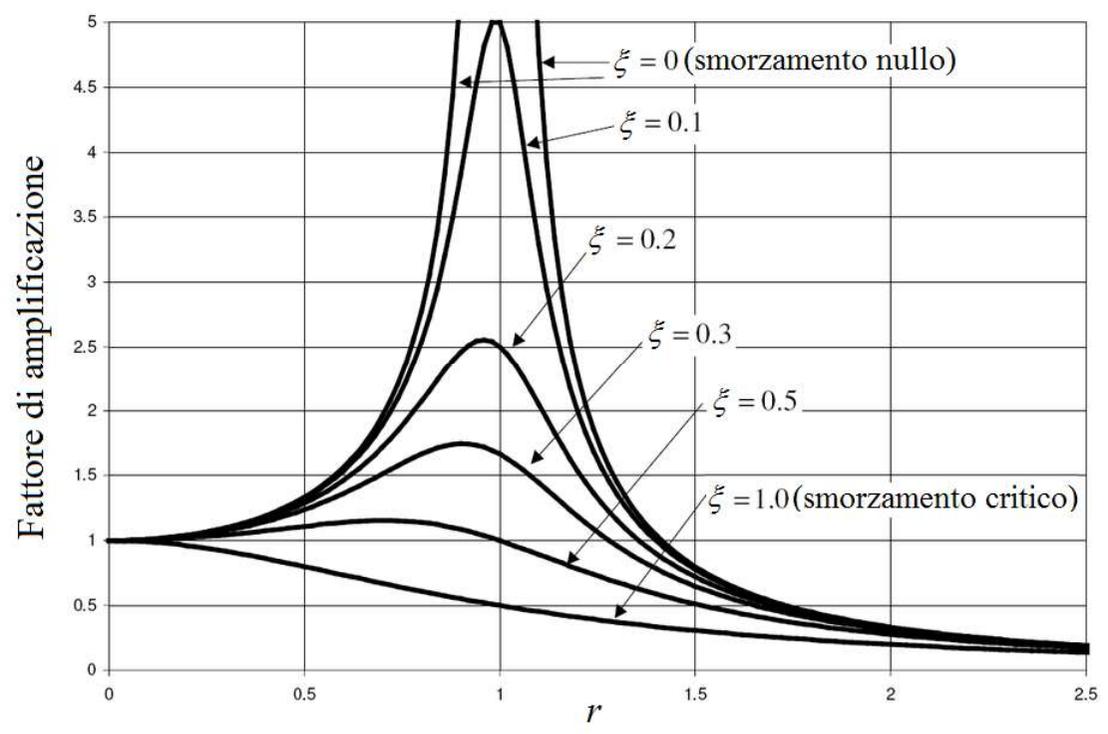
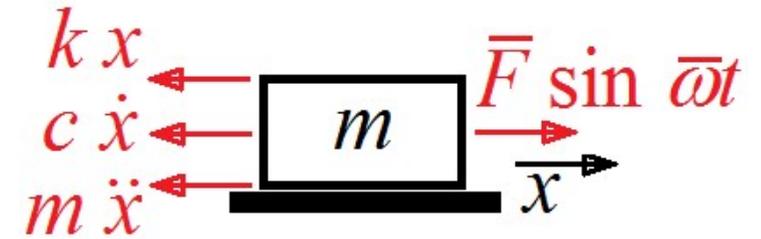
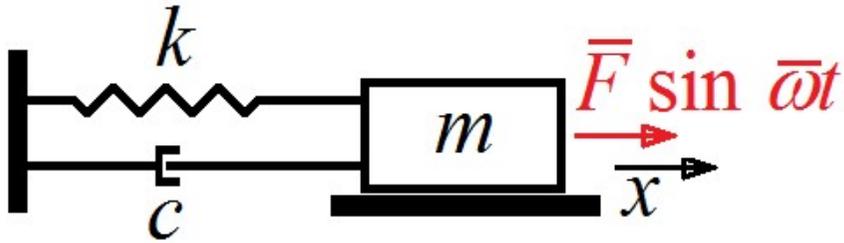
In particolare, si ha: $\theta = \text{arctg}(c\bar{\omega}/(k - m\bar{\omega}^2)) = \text{arctg}(2 \xi r / (1 - r^2))$ con $r = \bar{\omega} / \omega$,

avendo moltiplicato il numeratore ed il denominatore della prima espressione per $2 \xi / (\omega c)$ ed avendo posto $2 \xi / c = 1 / (\omega m)$.

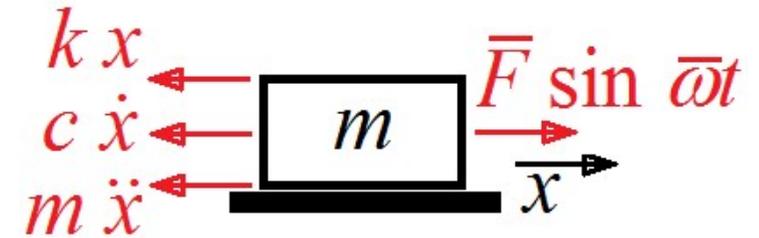
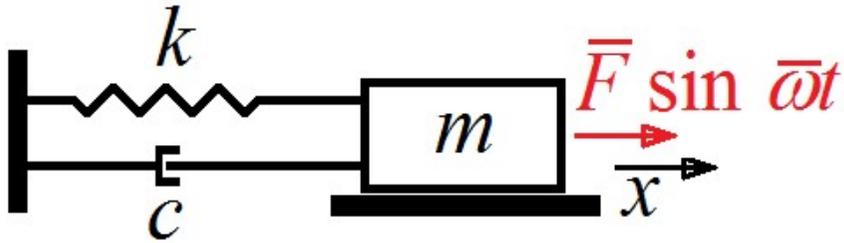
Per sistemi non smorzati si ha $x(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) + \frac{\bar{F}/k}{1 - r^2} \sin(\bar{\omega} t)$ e il contributo

$(\bar{F}/k) \sin(\bar{\omega} t) / (1 - r^2)$ è in fase con $F(t) = \bar{F} \sin(\bar{\omega} t)$ se $\bar{\omega} < \omega$. Altrimenti lo sfasamento è pari a π .

FATTORE DI AMPLIFICAZIONE ED ANGOLO DI FASE



LA RISONANZA NEL CASO DEI SISTEMI SMORZATI



Siccome, nel caso dei sistemi smorzati, risulta:

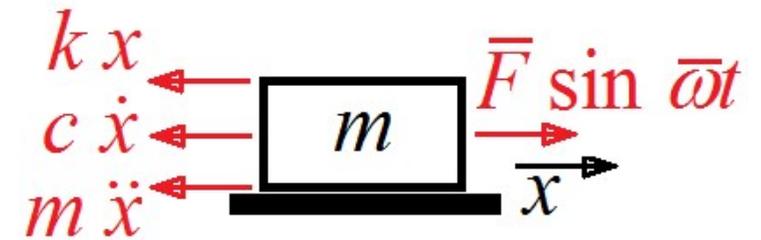
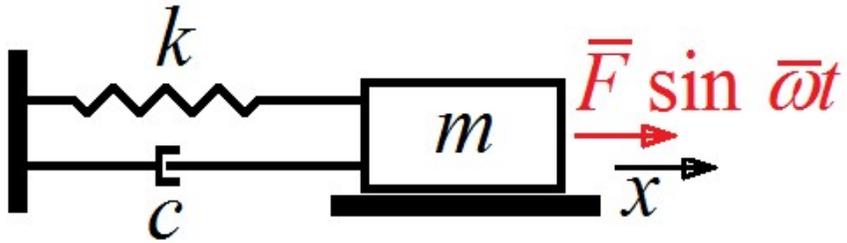
$$x_p(t) = \text{I} \left[(\bar{F} / k) e^{i(\bar{\omega}t - \theta)} / ((1-r^2)^2 + (2\xi r)^2)^{1/2} \right],$$

ove $1 / ((1-r^2)^2 + (2\xi r)^2)^{1/2} = \chi = \text{fattore di amplificazione dinamico}$ [=1/(2\xi) se $\omega = \bar{\omega}$],

si può anche porre: $x_p(t) = (\bar{F} / k) \sin(\bar{\omega}t - \theta) / ((1-r^2)^2 + (2\xi r)^2)^{1/2}$.

A regime si ha il solo contributo dell'integrale particolare e l'ampiezza massima dell'oscillazione si registra quando $\omega \approx \bar{\omega}$, come illustrato nei grafici relativi al fattore di amplificazione.

IL METODO DELL' AMPIEZZA DI BANDA [1/2]



Nota la risposta a regime $x_p(t) = X \sin(\bar{\omega}t - \theta)$ con $X = (\bar{F} / k) / ((1-r^2)^2 + (2\xi r)^2)^{1/2}$,

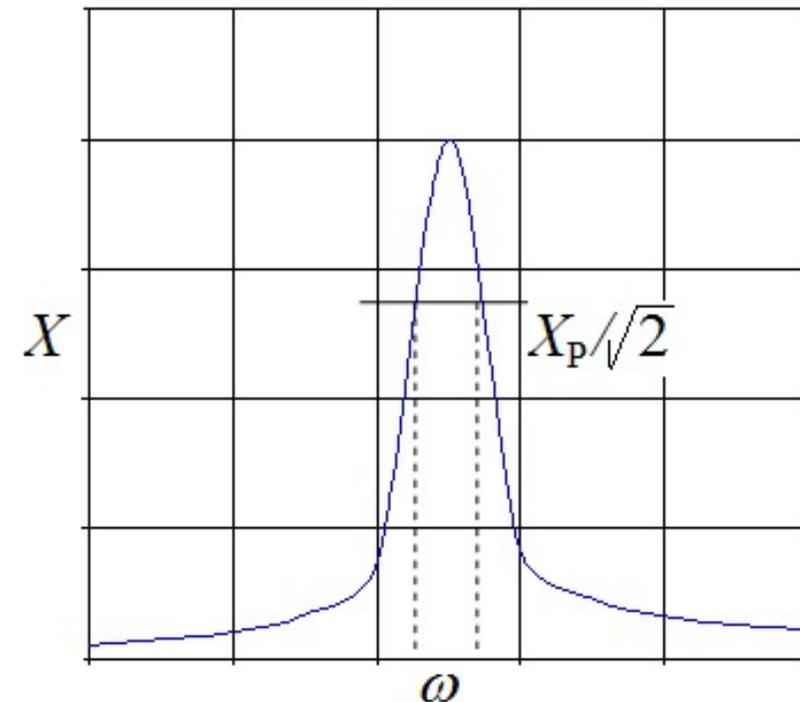
si può considerare la curva $X=X(\omega)$ e, in particolare,

i punti le cui ordinate sono pari a $X_p/\sqrt{2}$,

ove $X_p = (\bar{F}/k) / (2\xi)$ rappresenta con buona approssimazione il valore di picco della curva.

Questo significa imporre la condizione

$$(\bar{F} / k) / ((1-r^2)^2 + (2\xi r)^2)^{1/2} = (\bar{F} / k) / (2 \sqrt{2} \xi).$$



IL METODO DELL' AMPIEZZA DI BANDA [2/2]

La relazione $(\bar{F} / k) / ((1-r^2)^2 + (2\xi r)^2)^{1/2} = (\bar{F} / k) / (2 \sqrt{2} \xi)$ implica

$$\begin{aligned} r^2 &= -(2\xi^2 - 1) \pm ((2\xi^2 - 1)^2 + 8\xi^2 - 1)^{1/2} = -(2\xi^2 - 1) \pm (4\xi^4 - 4\xi^2 + 8\xi^2)^{1/2} \\ &= -(2\xi^2 - 1) \pm (4\xi^2 (\xi^2 + 1))^{1/2} = -(2\xi^2 - 1) \pm 2\xi (1 + \xi^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ponendo quindi $(1 + \xi^2)^{1/2} \approx 1$, deve risultare $r^2 = 1 \pm 2\xi - 2\xi^2$, eguaglianza che conduce alle soluzioni $r_1 = 1 - \xi - \xi^2$ e $r_2 = 1 + \xi - \xi^2$, i cui quadrati coincidono con le espressioni di r^2 , (trascurando i termini non lineari in ξ).

Dalla relazione $r_2 - r_1 = 2\xi$, si ricava infine:

$$\xi = (r_2 - r_1) / 2 = (\omega_2 - \omega_1) / (2\bar{\omega}) = (\omega_2 - \omega_1) / (\omega_1 + \omega_2), \text{ essendo } \bar{\omega} \approx (\omega_1 + \omega_2) / 2.$$

MOTO ARMONICO DI SUPPORTI ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI PER SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ



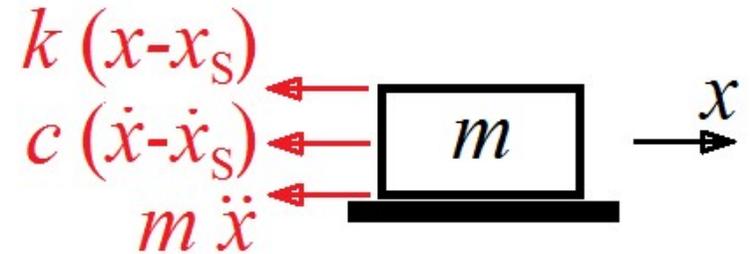
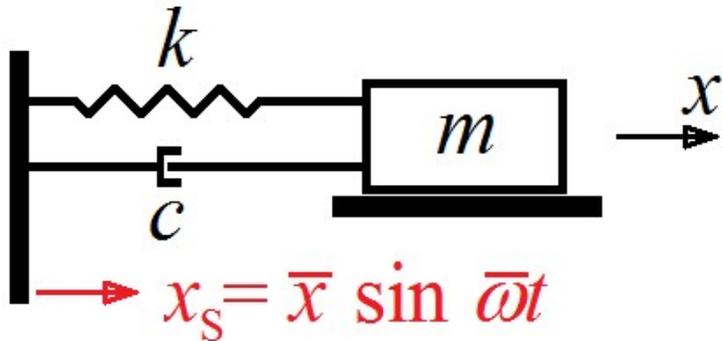
In presenza di un supporto caratterizzato da moto armonico, la risposta di un sistema smorzato ad un grado di libertà è ottenuta risolvendo l'equazione differenziale $m \ddot{x} + c (\dot{x} - \dot{x}_s) + k (x - x_s) = 0$.

Essendo poi $\dot{x}_s(t) = \bar{x} \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t$, si ha: $m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = c \bar{x} \bar{\omega} \cos \bar{\omega} t + k \bar{x} \sin \bar{\omega} t$.

Pertanto, $m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = \bar{F} \sin(\bar{\omega} t + \beta)$ con $\bar{F} = ((c\bar{x}\bar{\omega})^2 + (k\bar{x})^2)^{1/2}$, $\beta = \arctg(c\bar{\omega}/k)$.

Infatti, $A \cos \omega t + B \sin \omega t = C \sin(\omega t + \beta)$ se $A/C = \sin \beta$, $B/C = \cos \beta$, ove (in questo caso) $A = c \bar{x} \bar{\omega}$, $B = k \bar{x}$, $C = ((c\bar{x}\bar{\omega})^2 + (k\bar{x})^2)^{1/2} = \bar{F}$.

RISPOSTA AL MOTO ARMONICO DI UN SUPPORTO DA PARTE DI SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ



Come già visto, l'equazione differenziale $m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = \bar{F} \sin(\omega t + \beta)$ ammette come soluzione un **integrale generale** che rappresenta una risposta transitoria e un **integrale particolare** che descrive la risposta a regime: $x_p(t) = \chi (\bar{F}/k) \sin(\bar{\omega} t + \beta - \theta)$, ove $\chi = 1 / ((1-r^2)^2 + (2r\xi)^2)^{1/2}$, con $r = \bar{\omega}/\omega$.

Dalla espressione di $x_p(t)$ si perviene facilmente al concetto di **TRASMISSIBILITÀ**.

LA TRASMISSIBILITÀ

La **TRASMISSIBILITÀ** rappresenta il rapporto fra l'ampiezza del moto di un oscillatore e l'ampiezza del moto del supporto.

Data la risposta a regime $x_p(t) = \chi (\bar{F}/k) \sin(\bar{\omega}t + \beta - \theta)$, si ricorda che, nel caso in esame, $\bar{F} = ((c\bar{x}\bar{\omega})^2 + (k\bar{x})^2)^{1/2}$. Ponendo quindi $c = \xi c_{cr} = \xi 2 \omega m = \xi 2 k / \omega$, si ricava $\bar{F} = ((\bar{x}\bar{\omega} 2\xi k/\omega)^2 + (k\bar{x})^2)^{1/2} = k \bar{x} (1 + (2\xi r)^2)^{1/2}$.

Si ottiene quindi:
$$x_p(t) = \bar{x} (1 + (2\xi r)^2)^{1/2} \sin(\bar{\omega}t + \beta - \theta) / ((1-r^2)^2 + (2r\xi)^2)^{1/2}$$
$$= X \sin(\bar{\omega}t + \beta - \theta)$$

Da qui si ricava la **TRASMISSIBILITÀ**: $X / \bar{x} = (1 + (2\xi r)^2)^{1/2} / ((1-r^2)^2 + (2r\xi)^2)^{1/2}$.

LA TRASMISSIBILITÀ INTESA COME RAPPORTO FRA LA FORZA TRASMessa AL SUPPORTO E L'AMPIEZZA DELLA FORZANTE

Una forzante armonica implica $x_p(t) = \bar{x} \sin(\bar{\omega}t - \theta)$, ove $\bar{x} = \chi (\bar{F}/k)$, e sul supporto

si ha la forza $F^*(t) = kx + c\dot{x} = k\bar{x} \sin(\bar{\omega}t - \theta) + c\bar{x}\bar{\omega} \cos(\bar{\omega}t - \theta)$

$$= \bar{x} (k^2 + (c\bar{\omega})^2)^{1/2} \sin(\bar{\omega}t - \theta + \beta) = \bar{x} k (1 + (c\bar{\omega}/k)^2)^{1/2} \sin(\bar{\omega}t - \theta + \beta),$$

avendo posto $\beta = \arctg(c\bar{\omega}/k)$. Risulta inoltre, $k = m\omega^2$ e $c = \xi c_{cr} = \xi 2\omega m$.

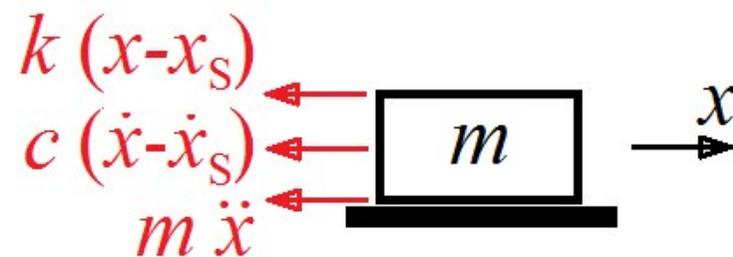
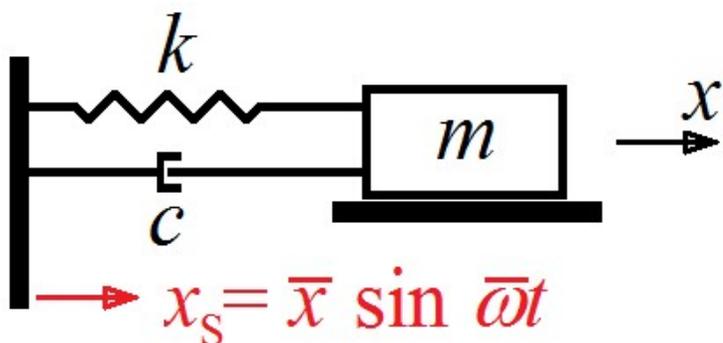
Si ricava quindi $F^*(t) = \bar{x} k (1 + (2\xi r)^2)^{1/2} \sin(\bar{\omega}t - \theta + \beta) = F_T \sin(\bar{\omega}t - \theta + \beta)$.

A questo punto, essendo $\bar{x} = \chi (\bar{F}/k)$, con $\chi = 1 / ((1-r^2)^2 + (2r\xi)^2)^{1/2}$, si può

dividere F_T per \bar{F} e pervenire alla TRASMISSIBILITÀ, data dal rapporto

$$F_T / \bar{F} = (1 + (2\xi r)^2)^{1/2} / ((1-r^2)^2 + (2r\xi)^2)^{1/2}$$

MOTO ARMONICO DI SUPPORTI E SOLUZIONE ALTERNATIVA PER SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ



L'equazione differenziale $m \ddot{x} + c (\dot{x} - \dot{x}_S) + k (x - x_S) = 0$ può essere riscritta nella forma $m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{x}_S$, avendo introdotto la funzione $u(t) = x(t) - x_S(t)$.

Essendo poi $\ddot{x}_S(t) = -\bar{x} \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t$, si ha: $m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = m \bar{x} \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t = \bar{F} \sin \bar{\omega} t$.

Pertanto, si ottiene l'integrale particolare $u_P(t) = \chi (\bar{F}/k) \sin (\bar{\omega} t - \theta)$,

ove $\chi = 1 / ((1-r^2)^2 + (2r\xi)^2)^{1/2}$ ed $r = \bar{\omega}/\omega$.

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO [1/2]

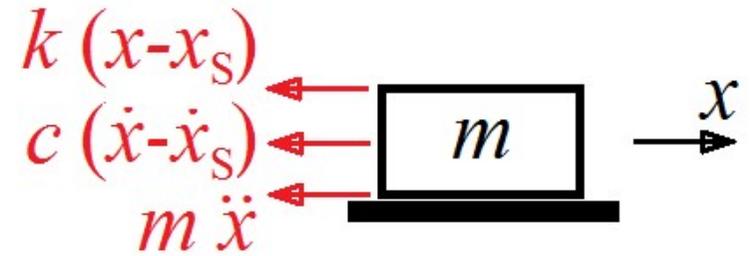
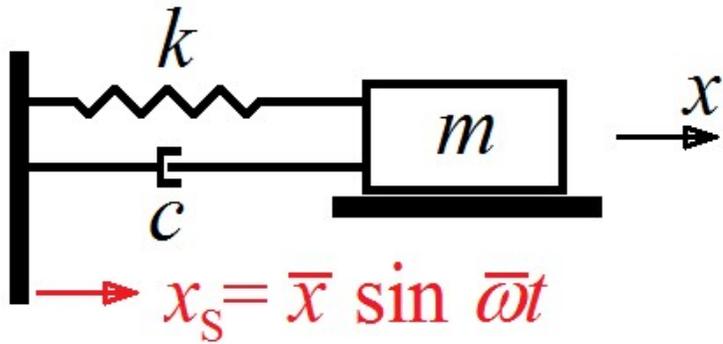
La **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO** indica il rapporto fra l'ampiezza del moto di un oscillatore relativamente al supporto e l'ampiezza della funzione eccitatrice.

Data la risposta a regime $u_p(t) = \chi (\bar{F}/k) \sin(\bar{\omega}t - \theta)$, si ricorda che, nel caso in esame, $\bar{F} = m\bar{x}\bar{\omega}^2$. Ponendo quindi $k = \omega^2 m$ ed $r = \bar{\omega}/\omega$, si ricava:

$$\begin{aligned} u_p(t) &= \chi (m\bar{x}\bar{\omega}^2 / (m\omega^2)) \sin(\bar{\omega}t - \theta) = r^2 \bar{x} \sin(\bar{\omega}t - \theta) / ((1-r^2)^2 + (2r\xi)^2)^{1/2} \\ &= U \sin(\bar{\omega}t - \theta). \end{aligned}$$

Considerando quindi il rapporto fra U e l'ampiezza \bar{x} del moto del supporto, si ottiene la **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO** $T = U / \bar{x} = r^2 / ((1-r^2)^2 + (2r\xi)^2)^{1/2}$.

LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO [2/2]



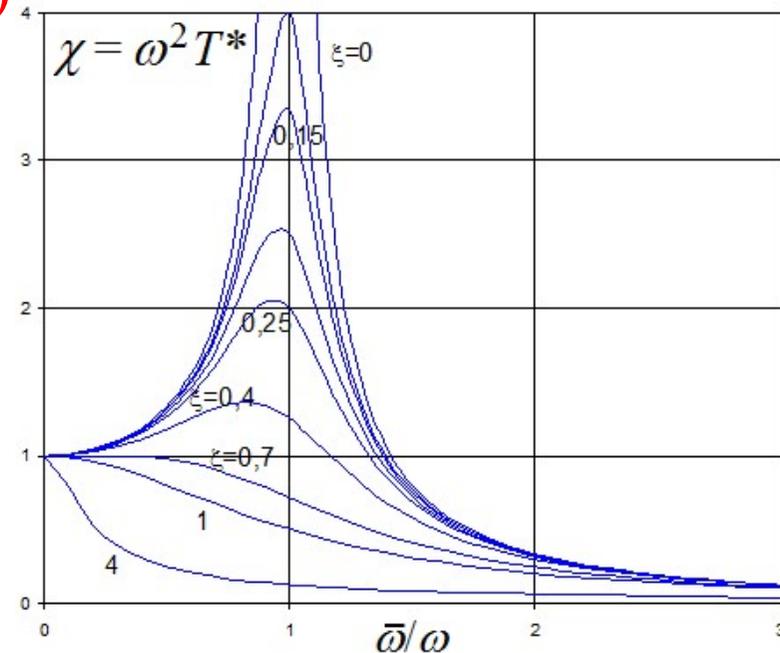
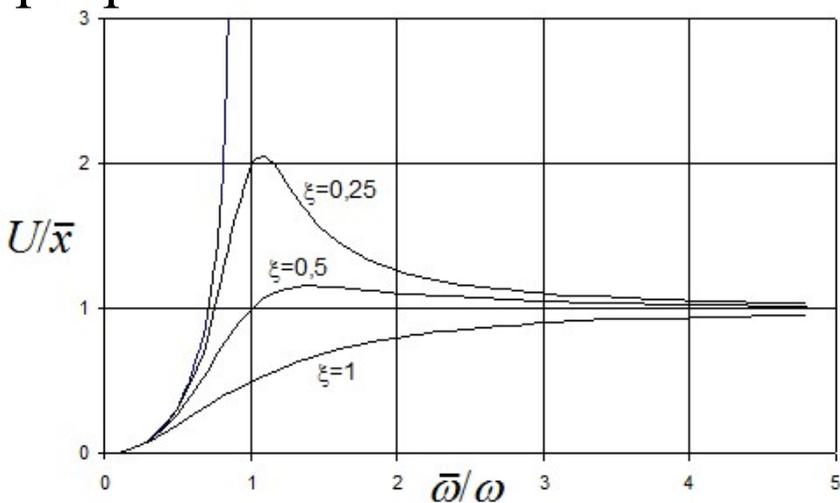
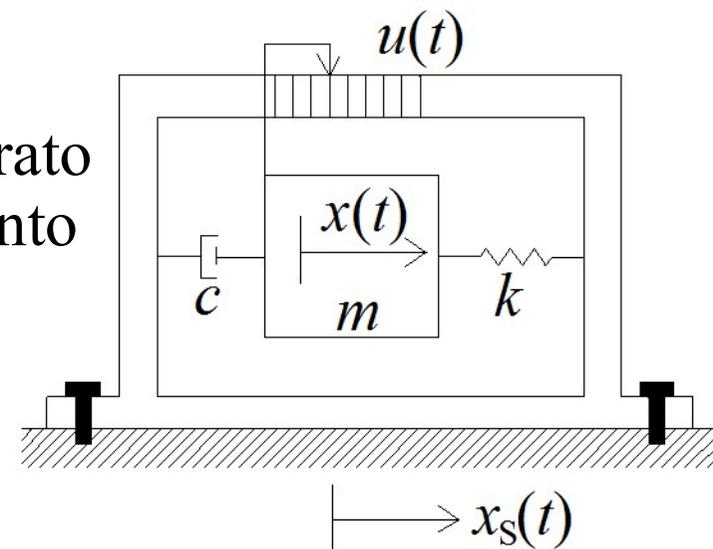
Per supporti soggetti ad uno spostamento $x_s(t) = \bar{x} \sin \bar{\omega} t$, introducendo la funzione $u(t) = x(t) - x_s(t)$ si perviene all'equazione differenziale $m \ddot{u} + c \dot{u} + k u = -m \ddot{x}_s$ e all'integrale particolare $u_p(t) = U \sin(\bar{\omega} t - \theta)$, con $U = \chi (m \bar{x} \bar{\omega}^2 / k) = \chi (\bar{x} \bar{\omega}^2 / \omega^2)$, in cui χ indica il **FATTORE DI AMPLIFICAZIONE** $1 / ((1-r^2)^2 + (2r\xi)^2)^{1/2}$ (ove $r = \bar{\omega} / \omega$).

Considerando quindi la funzione $\ddot{x}_s(t) = -\bar{x} \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t$, si può introdurre il rapporto fra U e l'ampiezza $\dot{x}^* = \bar{x} \bar{\omega}^2$ dell'accelerazione del supporto. Si definisce così la **FUNZIONE DI TRASFERIMENTO** $T^* = U / \dot{x}^* = \chi / \omega^2 = (1/\omega^2) / ((1-r^2)^2 + (2r\xi)^2)^{1/2}$.

OSCILLOGRAFI ED ACCELEROMETRI

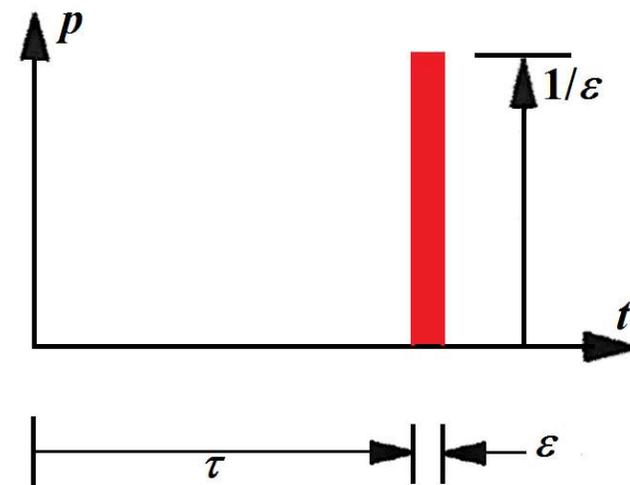
Lo schema dell'oscillografo e dell'accelerometro è illustrato nella figura a destra. Tali strumenti indicano lo spostamento o l'accelerazione del supporto attraverso la misura dello spostamento $u(t)$, cioè rilevando lo spostamento di una opportuna massa m rispetto al supporto stesso. I grafici delle funzioni di trasferimento viste in precedenza mostrano che $u(t)$ corrisponde allo spostamento $x_s(t)$ se $r = \bar{\omega}/\omega > 2$ e $\xi = 0.5$, mentre risulta essere

proporzionale all'accelerazione $\ddot{x}_s(t)$ quando si ha $r = \bar{\omega}/\omega < 0.5$ e $\xi = 0.7$.

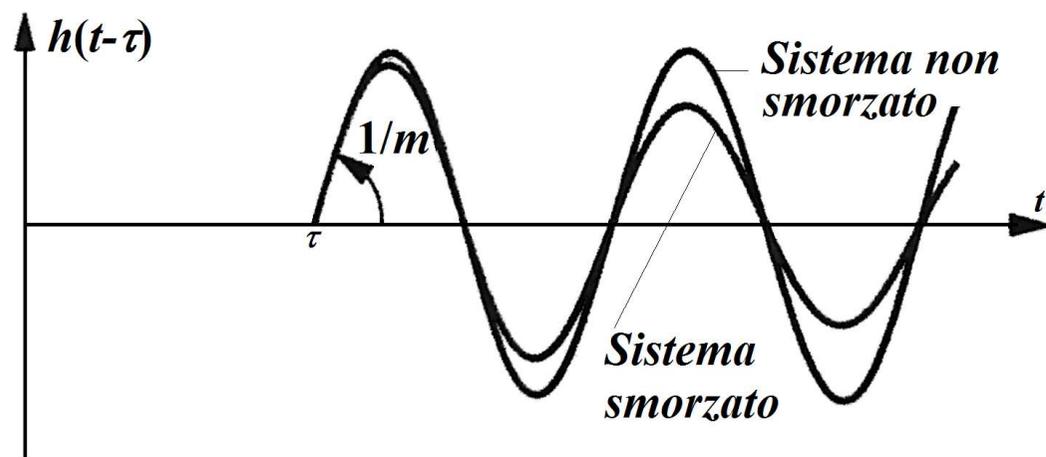


RISPOSTA DI UN SISTEMA AD UN IMPULSO UNITARIO

Si consideri una forza che agisca durante un intervallo di tempo ε molto breve e si assuma che il suo modulo tenda ad infinito se ε tende a zero. Qualora l'integrale relativo all'intervallo di tempo ε risulti essere finito, tale forza viene detta *impulsiva*, come succede per la forza $p(t) = 1/\varepsilon$ rappresentata nella figura a fianco. In questo caso particolare, l'integrale risulta pari ad 1, si parla di **IMPULSO UNITARIO** e la funzione di Dirac $\delta(t-\tau)$ definisce analiticamente tale impulso all'istante τ .



Un impulso unitario applicato ad una massa m in quiete induce una *velocità iniziale* e provoca lo spostamento $h(t-\tau)$. Infatti, data la relazione $p(t) = m \ddot{u}$, integrando nell'intervallo $dt = \varepsilon$ si ha: $m \{ \dot{u}(\tau+\varepsilon) - \dot{u}(\tau) \} = 1 = m dv$, essendo $dv = 1/m$ l'incremento di velocità provocato dall'impulso.



INTEGRALE DI DUHAMEL [1/3]

Per un **SISTEMA NON SMORZATO AD UN GRADO DI LIBERTÀ**, nel caso delle vibrazioni libere si ha $x(t) = x_0 \cos(\omega t) + (\dot{x}_0/\omega) \sin(\omega t)$, ove x_0 e \dot{x}_0 rappresentano lo spostamento e la velocità iniziali.

Ciò premesso, data una forzante qualsiasi $F(t)$ applicata durante un certo intervallo di tempo, questa può essere vista come costituita da un numero infinito di impulsi $F(\tau) d\tau$, ognuno dei quali agisce sul sistema inducendo vibrazioni libere e determinando un effetto che si sovrappone a quello di tutti gli impulsi precedenti. In particolare, dalla ben nota relazione $F(\tau) = m dv/dt$, si deduce immediatamente che un impulso $F(\tau) d\tau$ comporta vibrazioni libere. Più precisamente determina una risposta $dx(t-\tau) = (dv/\omega) \sin \omega(t-\tau)$, ove dv indica la velocità imposta alla massa m dall'impulso $F(\tau) d\tau$. Infatti, se si considera un sistema che all'istante τ viene sollecitato con un impulso $F(\tau) d\tau$, tale sistema risponde con vibrazioni libere caratterizzate da uno spostamento iniziale $x_0 = x(\tau) = 0$ e da una velocità iniziale $\dot{x}_0 = \dot{x}(\tau) = dv = F(\tau) d\tau / m$.

INTEGRALE DI DUHAMEL [2/3]

Se si vuol tener conto degli effetti dovuti agli infiniti impulsi $F(\tau) d\tau$, bisogna sovrapporre i loro infiniti contributi al moto del sistema.

Tali contributi, come si è visto, sono quantificati attraverso una relazione del tipo $dx(t-\tau) = (dv/\omega) \sin \omega(t-\tau)$. Si ottiene pertanto quello che è noto come **INTEGRALE DI DUHAMEL**:

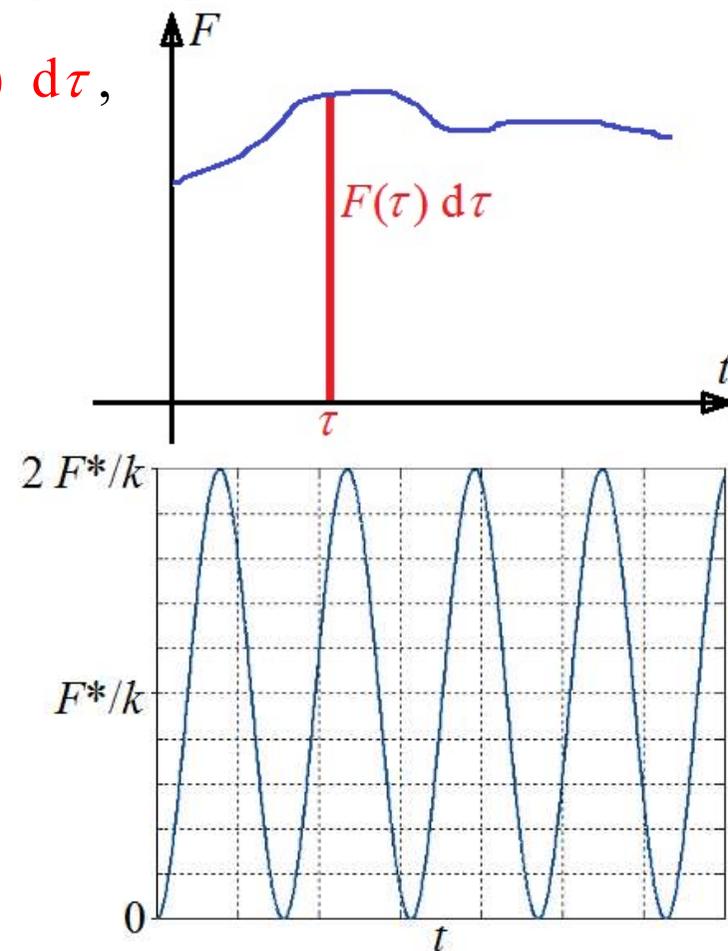
$$x(t) = \int_0^t (F(\tau)/(\omega m)) \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

Si noti che, nel caso di una forzante $F(t) = F^*$

(essendo F^* una costante), risulta:

$$x(t) = (F^*/\omega^2 m) [\cos \omega(t-\tau)]_0^t = (F^*/k) (1 - \cos \omega t),$$

in quanto $\omega^2 = (k/m)$. Di conseguenza, l'ampiezza massima dell'oscillazione è pari al doppio dello spostamento che sarebbe indotto da una forza F^* applicata in modo quasi-statico.



INTEGRALE DI DUHAMEL [3/3]

Nel caso di **SISTEMI SMORZATI AD UN GRADO DI LIBERTÀ** soggetti ad una forzante qualsiasi $F(t)$, si può procedere in modo del tutto analogo a quanto visto per sistemi non smorzati e sovrapporre gli effetti dovuti ad infiniti impulsi del tipo $F(\tau) d\tau$.

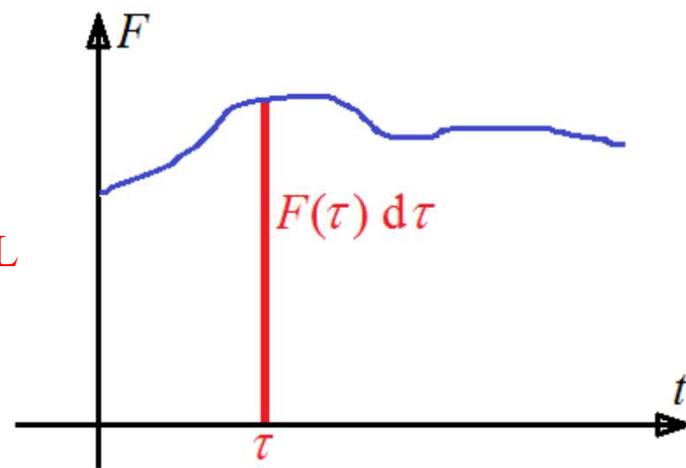
Per ciascun impulso imposto al tempo τ verrà considerata la risposta del sistema, caratterizzata da oscillazioni smorzate indotte da uno spostamento iniziale nullo ($x_0 = 0$) e da una velocità iniziale $\dot{x}_0 = \dot{x}(\tau) = dv = F(\tau) d\tau / m$.

Se il sistema è **sottosmorzato**, siccome non intervengono i termini dovuti ad un eventuale spostamento iniziale non nullo (essendo $x_0 = 0$), si ha:

$$dx(t-\tau) = e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \left((dv / \omega_D) \sin \omega_D (t-\tau) \right).$$

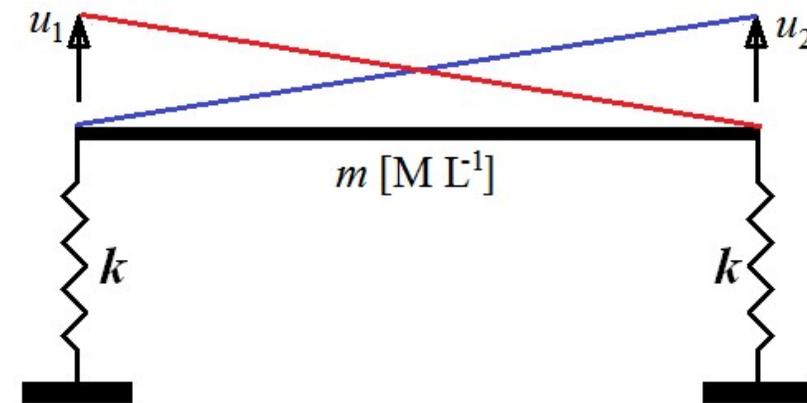
Ponendo $dv = F(\tau) d\tau / m$, si ottiene così l' **INTEGRALE DI DUHAMEL**

$$x(t) = \int_0^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \left(F(\tau) / (\omega_D m) \right) \sin \omega_D (t-\tau) d\tau$$



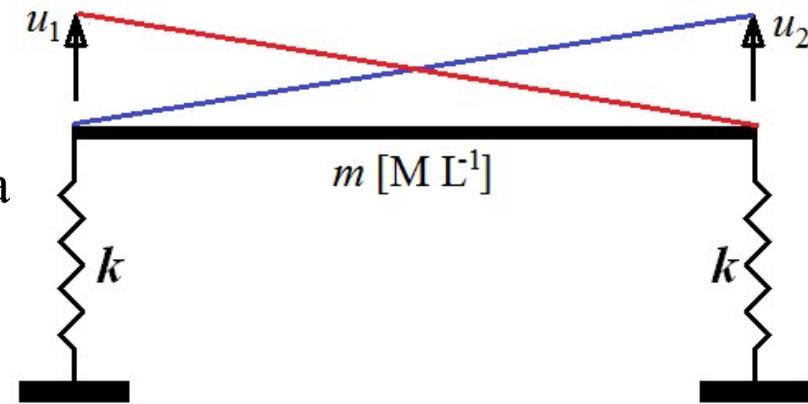
UN SISTEMA A DUE GRADI DI LIBERTÀ [1/3]

Per il sistema non smorzato della figura a fianco, si possono scrivere le equazioni di equilibrio combinando linearmente gli effetti dovuti ad eventuali spostamenti u_1 (e conseguente accelerazione \ddot{u}_1) e ad eventuali spostamenti u_2 (e relativa accelerazione \ddot{u}_2). Detta l la lunghezza dell'asta, introducendo un semiasse ξ con origine nell'estremo sinistro dell'asta ed orientato verso destra, si può facilmente scrivere l'espressione della forza d'inerzia che compete a ciascuna porzione di lunghezza $d\xi$ nel caso dell'atto di moto indicato in rosso, in cui solo u_1 è non nullo. Si ottiene allora: $df_1(\xi) = (m d\xi) \ddot{u}_1 (l - \xi) / l$. Si ricava quindi la risultante $R = m \ddot{u}_1 l / 2$, applicata a distanza $l/3$ dall'estremo sinistro, che è staticamente equivalente ad una forza $R_1 = m \ddot{u}_1 l / 3$ applicata all'estremo sinistro ed una forza $R_2 = m \ddot{u}_1 l / 6$ applicata all'estremo destro dell'asta.



UN SISTEMA A DUE GRADI DI LIBERTÀ [2/3]

Analogamente, nel caso dell'atto di moto indicato in blu, in cui solo $u_2(t)$ è non nullo, in corrispondenza di una porzione di lunghezza $d\xi$ risulta applicata una forza d'inerzia data dalla relazione $df_2(\xi) = (m d\xi) (\ddot{u}_2 \xi / \ell)$. Da qui ottiene la risultante $R = m \ddot{u}_2 \ell / 2$, applicata a distanza $\ell / 3$ dall'estremo destro.



Tale risultante è staticamente equivalente ad una forza $R_1 = m \ddot{u}_2 \ell / 6$ applicata all'estremo sinistro e ad una forza $R_2 = m \ddot{u}_2 \ell / 3$ applicata all'estremo destro dell'asta.

Ponendo $M = m \ell$, si ottengono le equazioni $k u_1 + M \ddot{u}_1 / 3 + M \ddot{u}_2 / 6 = 0$

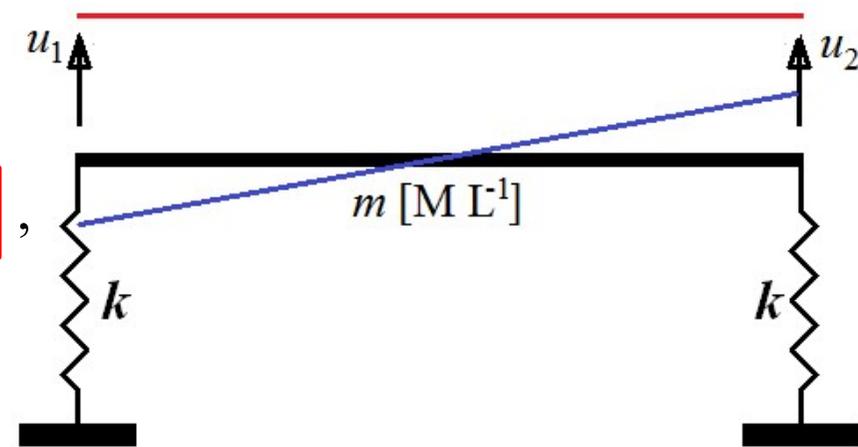
$$k u_2 + M \ddot{u}_1 / 6 + M \ddot{u}_2 / 3 = 0.$$

In forma compatta si può scrivere $\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, ove i termini sia del vettore \mathbf{u} , sia delle matrici \mathbf{K} e \mathbf{M} sono ovvi. Il sistema omogeneo così scritto ammette naturalmente la soluzione

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^* \sin \omega t$$

UN SISTEMA A DUE GRADI DI LIBERTÀ [3/3]

Data l'equazione differenziale $\mathbf{K} \mathbf{u} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, ricordando che $\mathbf{u}^T = [u_1 \ u_2]$, che \mathbf{K} è una matrice diagonale i cui termini significativi sono pari a k e che $\mathbf{M} = M \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}$, si vede che la soluzione $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^* \sin \omega t$ implica che sia nullo il determinante della matrice $[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}]$, poiché deve risultare $[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{u}^* \sin \omega t = \mathbf{0}$ per qualsiasi valore di t .



Occorre quindi risolvere un problema agli autovalori e, di conseguenza, soddisfare l'equazione $(k - \omega^2 M / 3)^2 - M^2 \omega^4 / 36 = 0$. Ponendo $\alpha = \omega^2$, si ottiene un'equazione di secondo grado:

$$k^2 + \alpha^2 M^2 / 9 - 2 k M \alpha / 3 - M^2 \alpha^2 / 36 = 3 \alpha^2 M^2 / 36 - 2 k M \alpha / 3 + k^2 = 0.$$

L'equazione $(M^2 / 12) \alpha^2 - (2 k M / 3) \alpha + k^2 = 0$ conduce alle soluzioni $\alpha_1 = 2k/M$ e $\alpha_2 = 6k/M$, ovvero $\omega_1 = (2 k / M)^{1/2}$ e $\omega_2 = (6 k / M)^{1/2}$. A questi autovalori corrispondono gli autovettori $\mathbf{u}_1 = [u^* \ u^*]$ e $\mathbf{u}_2 = [u^* \ -u^*]$, cioè i modi di vibrare indicati in rosso e in blu nella figura in alto.

TELAIO A DUE PIANI [1/4]

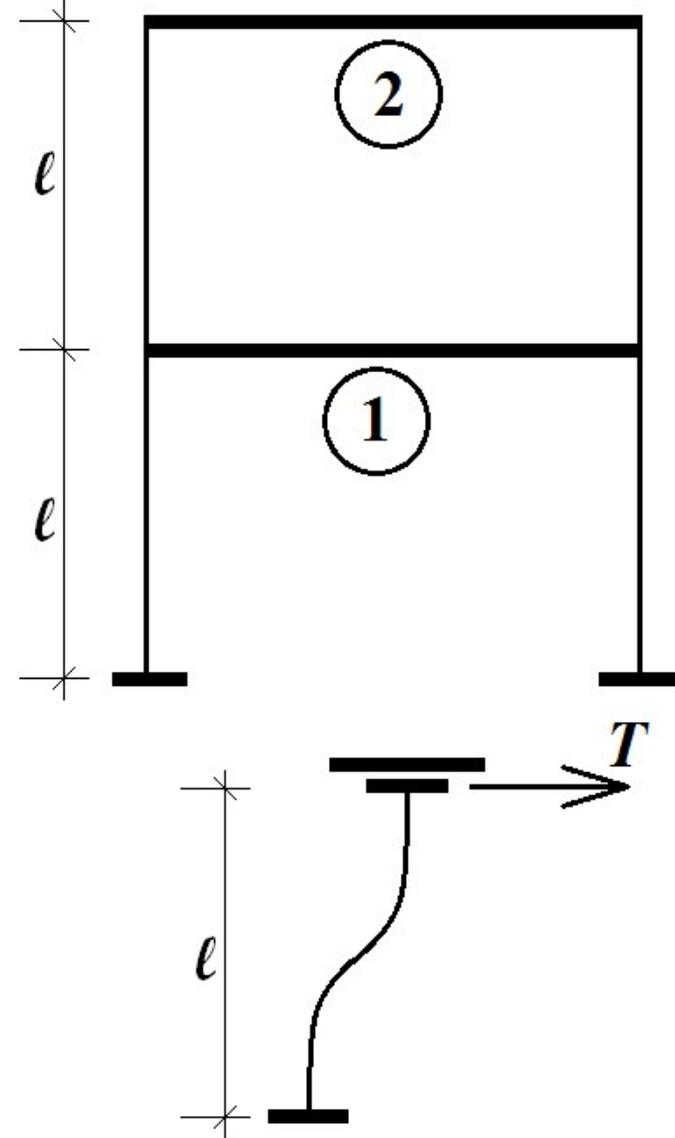
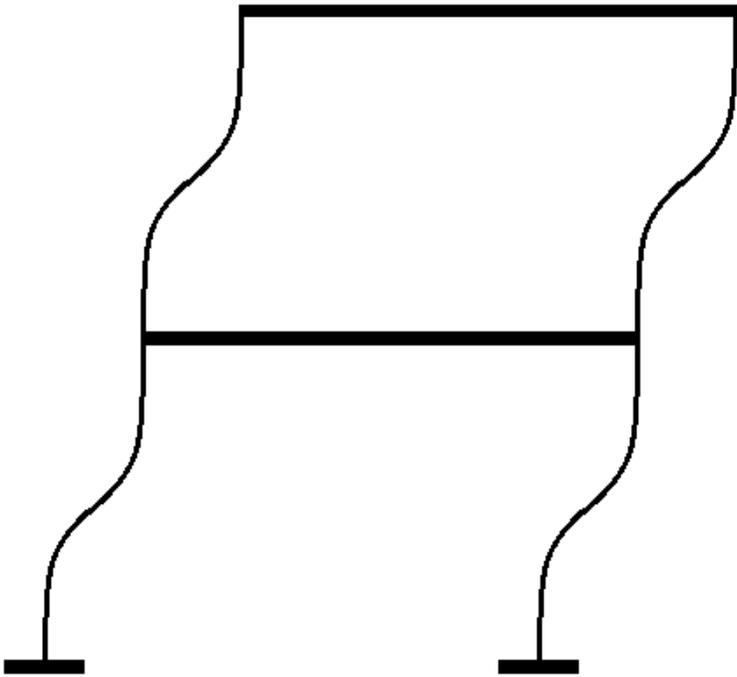
Dato un telaio del tipo indicato nella figura a fianco, si osserva che ciascun pilastro, alle estremità, è soggetto alle azioni taglianti $T = \Delta u 12 EI / \ell^3$, ove Δu rappresenta la differenza

fra gli spostamenti orizzontali delle sue sezioni estreme.

Pertanto, al di sotto del piano *i-esimo*, su ciascun pilastro agirà la forza

$$f_i = (12 EI / \ell^3) (u_i - u_j),$$

ove $j=i-1$ e $u_j = 0$ per $j=0$.



TELAIO A DUE PIANI [2/4]

Se in corrispondenza di ciascun piano ci sono n pilastri con le stesse proprietà meccaniche, la forza trasmessa dai pilastri a ciascun piano risulta essere $F_i = n (12 EI / \ell^3) (u_i - u_j) = k \Delta u_i$.

Nel caso di un telaio a due piani si ricavano quindi le equazioni di equilibrio:

$$k u_1 - k (u_2 - u_1) + m \ddot{u}_1 = p_1(t)$$

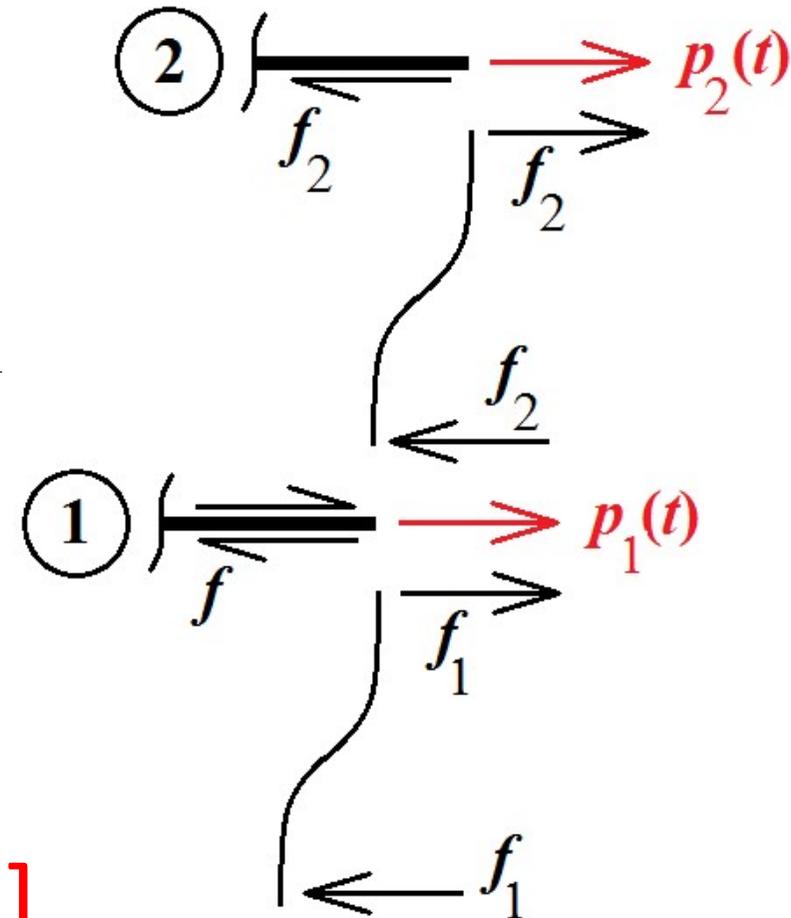
$$k (u_2 - u_1) + m \ddot{u}_2 = p_2(t)$$

avendo assunto masse uguali in corrispondenza dei due piani.

Riscrivendo le equazioni in forma matriciale si ha:

$$\mathbf{k} \mathbf{u} + \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{p}, \text{ ove } \mathbf{u}^T = [u_1 \ u_2], \mathbf{m} = \text{diag}[m], \mathbf{k} = \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}^T = [p_1(t) \ p_2(t)].$$



TELAIO A DUE PIANI [3/4]

Per determinare frequenze e modi propri, si considera il problema $\mathbf{k} \mathbf{u} + \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$.

Questo ammette la soluzione $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^* \sin \omega t$, in quanto risulta $[\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m}] \mathbf{u}^* \sin \omega t = \mathbf{0}$ per qualsiasi t .

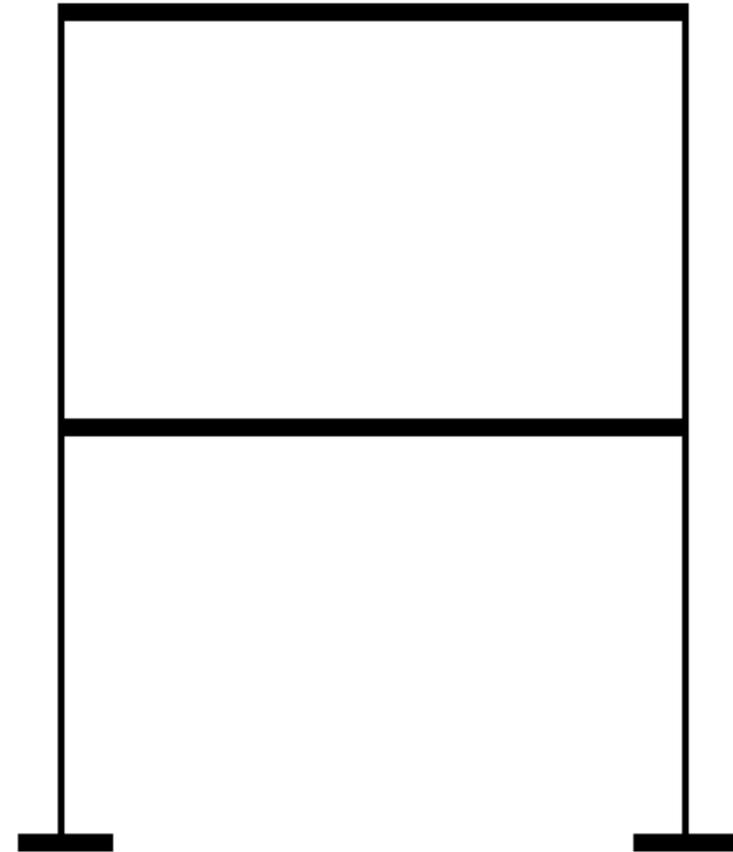
Rendere nullo il determinante della matrice $\begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix}$ significa risolvere l'equazione:

$$(2k - m \omega^2) (k - m \omega^2) - k^2 = 0.$$

Da qui si ricava: $2k^2 - m k \alpha - 2 m k \alpha + m^2 \alpha^2 - k^2 = 0$

e quindi: $m^2 \alpha^2 - 3 m k \alpha + k^2 = 0$, avendo posto $\alpha = \omega^2$.

Le relative soluzioni sono: $\alpha = \omega^2 = (3 m k \pm (9 m^2 k^2 - 4 m^2 k^2)^{1/2}) / (2 m^2) = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}) k / m$.



TELAIO A DUE PIANI [4/4]

Ponendo $\omega^2 = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}) k / m$, si trovano due soluzioni non banali

per il sistema: $(2k - m \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}) k / m) u_1 - k u_2 = 0$

$$-k u_1 + (k - m \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}) k / m) u_2 = 0$$

Quando $\omega^2 = \frac{1}{2} (3 - \sqrt{5}) k / m$,

assumendo $u_2 = 1$ unità, si ricava:

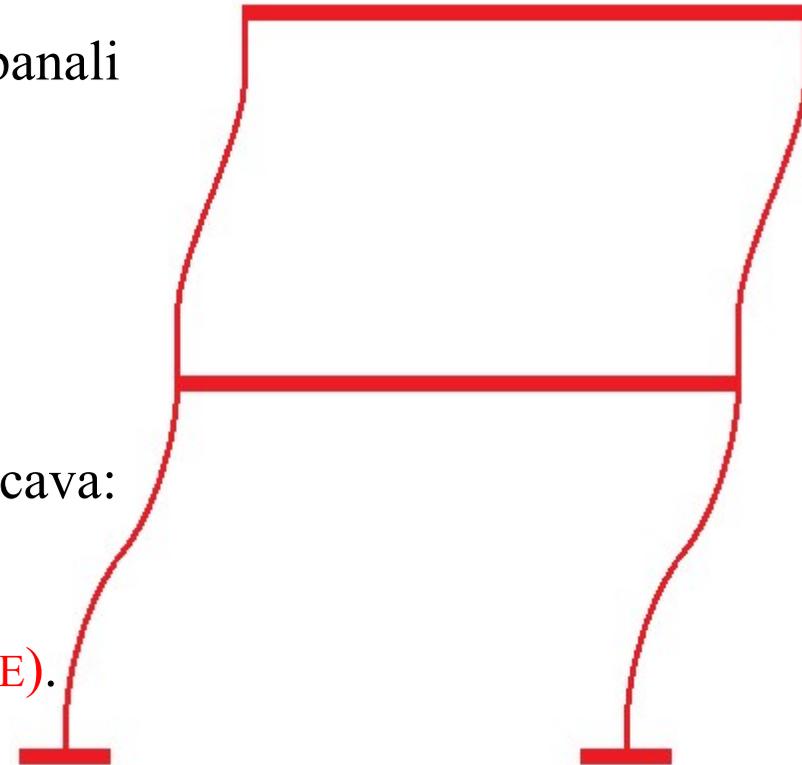
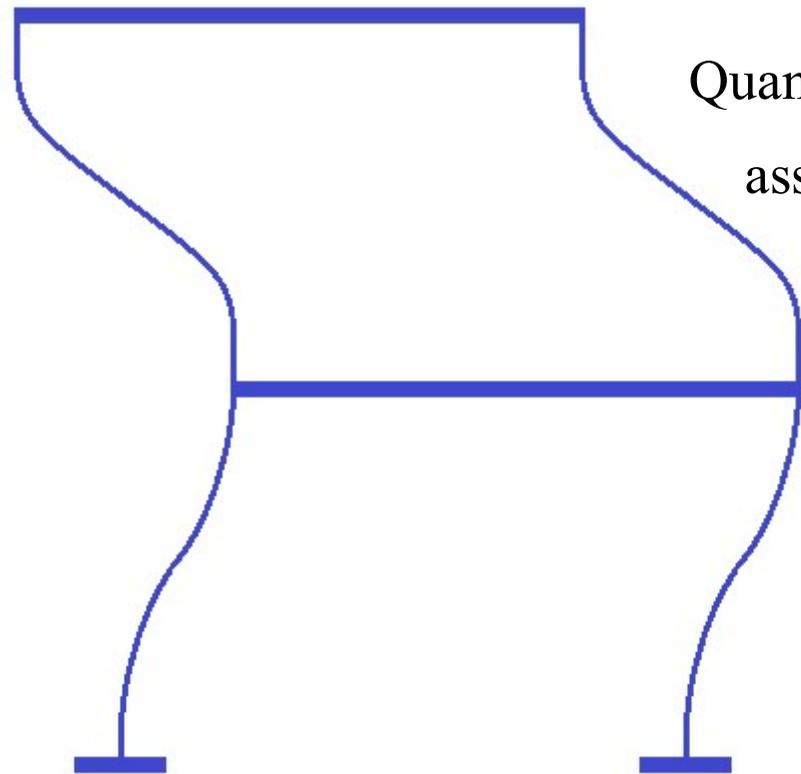
$$u_1 = 2 / (1 + \sqrt{5}) = 0.618$$

(PRIMO MODO DI VIBRARE).

Quando $\omega^2 = \frac{1}{2} (3 + \sqrt{5}) k / m$,

assumendo $u_2 = 1$ unità, si ricava:

$$u_1 = 2 / (1 - \sqrt{5}) = -1.618 \text{ (SECONDO MODO DI VIBRARE).}$$



MODI DI VIBRARE DI UNA TRAVE [1/7]

Trascurando sia le deformazioni indotte dal taglio e da eventuali azioni assiali, sia gli effetti dinamici dovuti alle accelerazioni angolari, si ottiene l'equazione di equilibrio $T + p(x,t) dx - (T+dT) - (m dx) \ddot{w} = 0$.

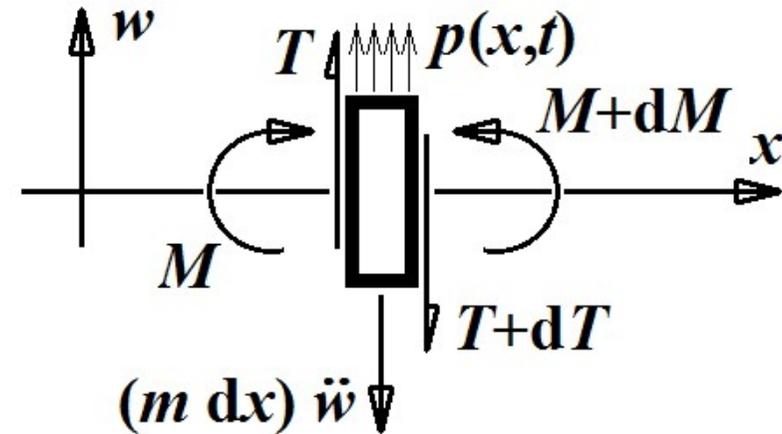
Da qui si ricava l'equazione differenziale

$$\partial T / \partial x + m (\partial^2 w / \partial t^2) = p(x,t).$$

Ricordando che $\partial M / \partial x = T$ e $M = EI (\partial^2 w / \partial x^2)$, si ricava: $T = EI (\partial^3 w / \partial x^3)$.

Si perviene quindi all'equazione differenziale $EI (\partial^4 w / \partial x^4) + m (\partial^2 w / \partial t^2) = p(x,t)$.

Si ha dunque un'equazione che può essere risolta trattando separatamente la componente spaziale e quella temporale.



MODI DI VIBRARE DI UNA TRAVE [2/7]

Si considera quindi l'equazione omogenea associata $EI (\partial^4 w / \partial x^4) + m (\partial^2 w / \partial t^2) = 0$ al fine di determinare frequenze e modi propri del sistema. Quando poi verrà il momento di definire le condizioni iniziali, si farà riferimento al caso della trave su due appoggi.

Come già detto, si procede separando la componente spaziale da quella temporale e pertanto si adotta una soluzione del tipo $w(x,t) = \Phi(x) f(t)$, che conduce alla relazione:

$$EI (\partial^4 \Phi / \partial x^4) f + m (\partial^2 f / \partial t^2) \Phi = 0. \text{ Da qui si ottiene } (EI / m) (\Phi^{IV} / \Phi) = -\ddot{f} / f = \omega^2,$$

in cui si è introdotto il termine ω^2 poiché i rapporti fra le funzioni che dipendono da x e quelle che dipendono da t devono essere costanti (ed il secondo rapporto deve essere negativo per avere una **SOLUZIONE STAZIONARIA**).

A questo punto è facile risolvere l'equazione differenziale $\ddot{f} + \omega^2 f = 0$, il cui integrale generale risulta essere $f(t) = \alpha^* \cos \omega t + \beta^* \sin \omega t$.

MODI DI VIBRARE DI UNA TRAVE [3/7]

Analogamente, è immediata la soluzione dell'equazione $\Phi^{IV} - \Phi \omega^2 m / (EI) = \Phi^{IV} - a^4 \Phi = 0$, avendo posto $a^4 = \omega^2 m / (EI)$. Si ricava infatti: $\Phi(x) = C^* e^{sx}$.

Osservando che $\Phi^{IV}(x) = C^* s^4 e^{sx}$ e sostituendo, si ottiene poi $C^* s^4 e^{sx} - C^* a^4 e^{sx} = 0$.

Questo implica $s^4 - a^4 = 0$ e quindi: $s = \pm a$ e $s = \pm i a$.

Si può dunque scrivere $\Phi(x) = C_1 e^{ax} + C_2 e^{-ax} + C_3 e^{iax} + C_4 e^{-iax}$.

Date le relazioni $e^{\pm iax} = \cos ax \pm i \sin ax$ ed $e^{\pm ax} = \cosh ax \pm \sinh ax$,

essendo $\sinh \alpha = (e^\alpha - e^{-\alpha})/2$ e $\cosh \alpha = (e^\alpha + e^{-\alpha})/2$, si deduce:

$$\Phi(x) = A \sin ax + B \cos ax + C \sinh ax + D \cosh ax,$$

avendo introdotto le costanti di integrazione A, B, C, D dedotte dalla relazione

$$\Phi(x) = (C_1 + C_2) \cosh ax + (C_1 - C_2) \sinh ax + (C_3 + C_4) \cos ax + (C_3 - C_4) i \sin ax.$$

MODI DI VIBRARE DI UNA TRAVE [4/7]

L'espressione $\Phi(x) = (C_1 + C_2) \cosh ax + (C_1 - C_2) \sinh ax + (C_3 + C_4) \cos ax + (C_3 - C_4) i \sin ax$ suggerisce infatti di porre $C_1 + C_2 = D$ e $C_1 - C_2 = C$.

Si possono poi considerare le relazioni $C_3 = \xi + i \eta$, $C_4 = \chi + i \psi$ ed osservare che risulta:
 $(C_3 + C_4) = (\xi + \chi) + i (\eta + \psi)$, $(C_3 - C_4) i = (\xi - \chi) i + (\psi - \eta)$, essendo $i^2 = -1$.

Ponendo quindi $\xi = \chi$ ed $\eta = -\psi$, si ottengono $(C_3 + C_4)$ e $(C_3 - C_4) i$ reali.

Di conseguenza, nell'equazione $\Phi(x) = A \sin ax + B \cos ax + C \sinh ax + D \cosh ax$ risultano reali pure i parametri $A = (C_3 - C_4) i$ e $B = (C_3 + C_4)$.

Per procedere è ora necessario tener conto delle condizioni iniziali. Come si è già precisato, si intende prendere in considerazione il caso della **TRAVE SU DUE APPOGGI**. In questo caso occorre quindi soddisfare le condizioni $w = 0$ e $\partial^2 w / \partial x^2 = 0$ per qualsiasi t agli estremi, dovendo essere nulli sia gli spostamenti trasversali, sia i momenti.

MODI DI VIBRARE DI UNA TRAVE [5/7]

La condizione al contorno $w = 0$ per $x = 0$ e per qualsiasi t impone $B + D = 0$ poiché

$$\Phi(x=0) = A \sin 0 + B \cos 0 + C \sinh 0 + D \cosh 0 \quad \text{con} \quad \sin 0 = \sinh 0 = 0, \quad \cos 0 = \cosh 0 = 1.$$

Risulta inoltre $\Phi''(x) = -A a^2 \sin ax - B a^2 \cos ax + C a^2 \sinh ax + D a^2 \cosh ax$.

Di conseguenza, la condizione al contorno $w'' = 0$ per $x = 0$ e per qualsiasi t impone $-B + D = 0$.

Si deduce quindi $B = D = 0$.

Considerando ora le condizioni $w = 0$, $w'' = 0$ per $x = \ell$ e per qualsiasi t , si ha:

$$\Phi(x=\ell) = A \sin a\ell + C \sinh a\ell = 0, \quad \Phi''(x=\ell) = -A a^2 \sin a\ell + C a^2 \sinh a\ell = 0.$$

Dividendo la seconda relazione per a^2 e sommandola alla prima si ottiene $2 C \sinh a\ell = 0$.

Questo implica $C = 0$ e, di conseguenza, $\Phi(x) = A \sin ax$.

MODI DI VIBRARE DI UNA TRAVE [6/7]

Dovendo risultare $\Phi(x) = A \sin ax$ e dovendo essere $\Phi(x=\ell) = 0$ per $x = 0$ e per qualsiasi t , la costante a può assumere uno qualsiasi degli infiniti valori tali che $a = (m \omega^2 / EI)^{1/4} = n \pi / \ell$, essendo n un numero intero positivo.

Si deducono quindi le infinite pulsazioni naturali $\omega_n = n^2 \pi^2 (EI / (m \ell^4))^{1/2}$.

La funzione $w(x,t)$ diventa quindi: $w(x,t) = \sum_n A_n \sin a_n x (\alpha_n \cos \omega_n t + \beta_n \sin \omega_n t)$
 $= \sum_n \sin (n \pi x / \ell) (c_n \cos \omega_n t + s_n \sin \omega_n t)$.

Imponendo poi, per $t = 0$, le condizioni

$$w(x,0) = w_0(x) = \sum_n c_n \sin a_n x$$

$$\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x) = \sum_n s_n \omega_n \sin a_n x,$$

si ottiene infine:

$$c_n = (2 / \ell) \int_{\ell} w(x,0) \sin a_n x \, dx \quad , \quad \omega_n s_n = (2 / \ell) \int_{\ell} \dot{w}(x,0) \sin a_n x \, dx$$

MODI DI VIBRARE DI UNA TRAVE [7/7]

I valori di s_n e c_n indicati in precedenza possono essere ottenuti osservando che, per $t=0$, si ha, come si è detto: $w(x,0) = w_0(x) = \sum_m c_m \sin a_m x$, $\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x) = \sum_m s_m \omega_m \sin a_m x$.

Di conseguenza si può porre: $w(x,0) \sin a_n x = \sum_m c_m \sin a_m x \sin a_n x$
 $\dot{w}(x,0) \sin a_n x = \sum_m s_m \omega_m \sin a_m x \sin a_n x$.

Integrando si ottiene allora: $\int_{\ell} w(x,0) \sin a_n x \, dx = (\ell/2) c_n$, $\int_{\ell} \dot{w}(x,0) \sin a_n x \, dx = (\ell/2) s_n \omega_n$.

Considerando infatti integrali del tipo $\int_{\ell} \sin a_m x \sin a_n x \, dx$, si ottengono i seguenti risultati:

$$\left[\frac{1}{2} \frac{\sin((a_n - a_m)x)}{(a_n - a_m)} - \frac{1}{2} \frac{\sin((a_n + a_m)x)}{(a_n + a_m)} \right]_0^{\ell} \quad \text{se } a_m \neq a_n$$

$$\left[\frac{1}{2} (x - \sin(a_n x) \cos(a_n x) / a_n) \right]_0^{\ell} \quad \text{se } a_m = a_n \longrightarrow \int_{\ell} \sin(a_n x) \sin(a_n x) \, dx = \int_{\ell} \sin^2(a_n x) \, dx.$$

La prima espressione da calcolare per $x=0$ ed $x=\ell$ è sempre nulla per entrambi i valori di x , in quanto $(a_n \pm a_m)$ è un multiplo di $(\pi x / \ell)$ e, quindi, $\sin(a_n \pm a_m)x = 0$; la seconda espressione è invece pari ad $\ell/2$, poiché (per $x=0$ o $x=\ell$) $x=\ell$ è l'unico termine non nullo che dipende da x .

ELEMENTI FINITI PER ANALISI DINAMICHE

Applicando il principio dei lavori virtuali si può scrivere:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V \mathbf{F}^T(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{u} dV + \int_S \mathbf{f}^T(\mathbf{x}, t) \delta \mathbf{u} dS$$

ove $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ indica una forza per unità di volume e può includere eventuali forze d'inerzia $\mathbf{F}^*(\mathbf{x}, t)$.

Si può quindi porre $\mathbf{F}^*(\mathbf{x}, t) = -m(\mathbf{x}) \Phi_e(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{u}}_e(t)$, ove $\ddot{\mathbf{u}}_e(t)$ rappresenta un vettore di accelerazioni

nodali. Discretizzando il sistema, utilizzando le consuete funzioni di forma e, in particolare, la

relazione $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \Phi_e(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{u}}_e(t)$, si ricava l'equazione $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{U}(t) = \mathbf{Q}(t)$. In questa

equazione si è trascurato lo smorzamento, mentre la matrice di massa (per la precisione, la

MATRICE DI MASSA COERENTE) è ottenuta assemblando le matrici di massa dei singoli elementi.

Tali matrici, con riferimento ad un sistema di assi locali, sono date da integrali del tipo

$$\mathbf{m}_e = \int_{V_e} [\Phi_e(\mathbf{x})]^T m(\mathbf{x}) \Phi_e(\mathbf{x}) dV$$

ELEMENTI FINITI IN DINAMICA (CASO DELLE TRAVI)

Se si considera il caso degli elementi di trave, la procedura è del tutto analoga a quella generale, valida per qualsiasi tipo di elemento finito. Dunque, in virtù del principio dei lavori virtuali si può scrivere:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_{\ell} \mathbf{q}^T(x,t) \delta \mathbf{u} dx + \int_{\ell} \mathbf{p}^T(x,t) \delta \mathbf{u} dx$$

ove $\mathbf{q}(x,t)$ rappresenta una forza di volume per unità di lunghezza e può includere un contributo $\mathbf{q}^*(x,t)$ che rappresenta una forza d'inerzia. Si può quindi porre $\mathbf{q}^*(x,t) = -m(x) \Phi_e(x) \ddot{\mathbf{u}}_e(t)$.

Discretizzando il sistema, utilizzando le consuete funzioni di forma e, in particolare, la relazione $\ddot{\mathbf{u}}(x,t) = \Phi_e(x) \ddot{\mathbf{u}}_e(t)$, si ricava l'equazione $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{U}(t) = \mathbf{Q}(t)$.

Come nel caso precedente, si è trascurato lo smorzamento, mentre la matrice di massa (per la precisione, la **MATRICE DI MASSA COERENTE**) è ottenuta assemblando le matrici di massa dei singoli elementi, determinate calcolando integrali del tipo

$$\mathbf{m}_e = \int_{\ell_e} [\Phi_e(x)]^T m(x) \Phi_e(x) dx$$

CONDENSAZIONE STATICA [1/2]

Dato il sistema $\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{Q}$, in genere è possibile traslare righe e colonne in modo tale da ricondursi ad un sistema che si presenta nella forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix}$$

Si ha quindi: $\mathbf{U}_1 = -[\mathbf{K}_{11}]^{-1} \mathbf{K}_{12} \mathbf{U}_2$. Questo implica: $\mathbf{Q}_2 = -\mathbf{K}_{21} [\mathbf{K}_{11}]^{-1} \mathbf{K}_{12} \mathbf{U}_2 + \mathbf{K}_{22} \mathbf{U}_2 = \mathbf{K}^* \mathbf{U}_2$.

Risulta perciò

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{T}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix} \quad \text{con } \mathbf{T}^* = -[\mathbf{K}_{11}]^{-1} \mathbf{K}_{12}.$$

A questo punto si verifica facilmente che $\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$, avendo posto:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}^* \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}$$

CONDENSAZIONE STATICA [2/2]

Si verifica immediatamente che $\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$. Risulta infatti:

$$\mathbf{K} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -[\mathbf{K}_{11}]^{-1} \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{12} \\ -\mathbf{K}_{21} [\mathbf{K}_{11}]^{-1} \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}$$

Da qui si ricava quindi:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} [-[\mathbf{K}_{11}]^{-1} \mathbf{K}_{12}]^T & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{K}_{21} [\mathbf{K}_{11}]^{-1} \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix}$$
$$= -\mathbf{K}_{21} -\mathbf{K}_{21} [\mathbf{K}_{11}]^{-1} \mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{22}.$$

La stessa trasformazione, in linea di principio, può essere applicata alla matrice di massa \mathbf{M} e, nel caso delle travi, non si commettono errori se è utilizzata la matrice di masse concentrate, poiché i termini che dovrebbero essere moltiplicati per le accelerazioni angolari sono nulli.

MODI PROPRI DI VIBRARE

Dato il problema $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{0}$, una soluzione non banale è data da $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^* \sin(\omega t)$.

Risulta infatti $[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}] \mathbf{U}^* \sin(\omega t) = \mathbf{0}$ con $\mathbf{U}^* \neq \mathbf{0}$ se la matrice $[-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}]$ è singolare.

Se il modello numerico è caratterizzato da n gradi di libertà, si possono quindi determinare n autovalori $(\omega_i)^2$ in corrispondenza dei quali si possono definire n autovettori \mathbf{U}_i ($i = 1, \dots, n$).

Considerando quindi una coppia di autovalori $(\omega_i)^2, (\omega_j)^2$ ed i relativi autovettori $\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_j$, si ha:

$$\mathbf{K} \mathbf{U}_i = (\omega_i)^2 \mathbf{M} \mathbf{U}_i \quad , \quad \mathbf{K} \mathbf{U}_j = (\omega_j)^2 \mathbf{M} \mathbf{U}_j .$$

Premoltiplicando entrambi i termini della prima equazione per $\{\mathbf{U}_j\}^T$ ed entrambi i termini della seconda per $\{\mathbf{U}_i\}^T$, se si sottrae membro a membro si ottiene $((\omega_i)^2 - (\omega_j)^2) \{\mathbf{U}_i\}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_j = 0$.

Pertanto, se $i \neq j$, risulta: $\{\mathbf{U}_i\}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_j = 0$. Questo implica che gli autovettori sono fra loro ortogonali rispetto alla matrice di massa.

MODI PROPRI NORMALIZZATI

Ciascun autovettore \mathbf{U}_i ($i = 1, \dots, n$) può essere facilmente trasformato in un autovettore $\boldsymbol{\varphi}_i$, normalizzato rispetto alla matrice di massa. In altre parole, dato un qualsiasi autovettore \mathbf{U}_i , è possibile ricavare un autovettore $\boldsymbol{\varphi}_i$, tale che $\{\boldsymbol{\varphi}_i\}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i = 1$).

Basta infatti porre $\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{U}_i / (\{\mathbf{U}_i\}^T \mathbf{M} \mathbf{U}_i)^{1/2}$.

A questo punto gli n autovettori $\boldsymbol{\varphi}_i$ possono essere raccolti in una matrice $\boldsymbol{\Phi}$ e si perviene subito alla relazione $\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\Phi} = \text{diag}[(\omega_i)^2]$ $\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} = \text{diag}[(\omega_i)^2]$.

Dunque, la matrice $\boldsymbol{\Phi}$ è costituita da autovettori che risultano essere non solo ortogonali, ma anche normalizzati rispetto alla matrice \mathbf{M} .

ANALISI MODALE

Dato il problema $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{Q}(t)$, si può introdurre un cambiamento di variabili e scrivere:
 $\mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{K} \Phi \mathbf{W} = \mathbf{Q}(t)$, avendo posto $\mathbf{U}(t) = \Phi \mathbf{W}(t)$.

Premoltiplicando tutti i termini per Φ^T , si ottiene quindi:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{W}} + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{W} = \mathbf{P}(t), \text{ avendo posto: } \mathbf{P}(t) = \Phi^T \mathbf{Q}(t).$$

In questo modo ci si riconduce ad un problema di n equazioni disaccoppiate, che, di fatto, permettono di determinare la risposta del sistema assegnato attraverso la soluzione di problemi dinamici caratterizzati da un solo grado di liberta.

Tenendo conto delle proprietà della matrice Φ , l'ultima equazione può essere riscritta nella forma:

$$\ddot{\mathbf{W}} + \text{diag}[(\omega_i)^2] \mathbf{W} = \mathbf{P}(t)$$

ANALISI MODALE E SMORZAMENTO

Una volta ottenute n equazioni disaccoppiate per sistemi non smorzati, in linea di principio si può pensare di scrivere equazioni analoghe tenendo conto di un eventuale smorzamento. Tali equazioni, in forma scalare, diventerebbero: $\ddot{w} + 2 \omega_i \xi_i \dot{w} + (\omega_i)^2 w = P(t)$, con $i = 1, \dots, n$.

Questo, tuttavia, è possibile solo in presenza di una matrice di smorzamento \mathbf{C} con proprietà analoghe a quelle delle matrici \mathbf{M} e/o \mathbf{K} . In realtà, questo in genere non avviene e, in ogni caso, la matrice di smorzamento \mathbf{C} non viene definita partendo da uno smorzamento specifico $c(\mathbf{x})$, a differenza di quanto succede (per esempio) nel caso della matrice di massa, che può essere generata considerando una massa specifica $m(\mathbf{x})$.

Per altro, come suggerito da Rayleigh, si può introdurre una matrice di smorzamento attraverso una combinazione lineare delle matrici di massa e di rigidità: $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$. Così facendo, la matrice $[\Phi^T \mathbf{C} \Phi]$ risulta essere diagonale e si può porre: $[\Phi^T \mathbf{C} \Phi] = \text{diag}[(2 \omega_i \xi_i)]$.

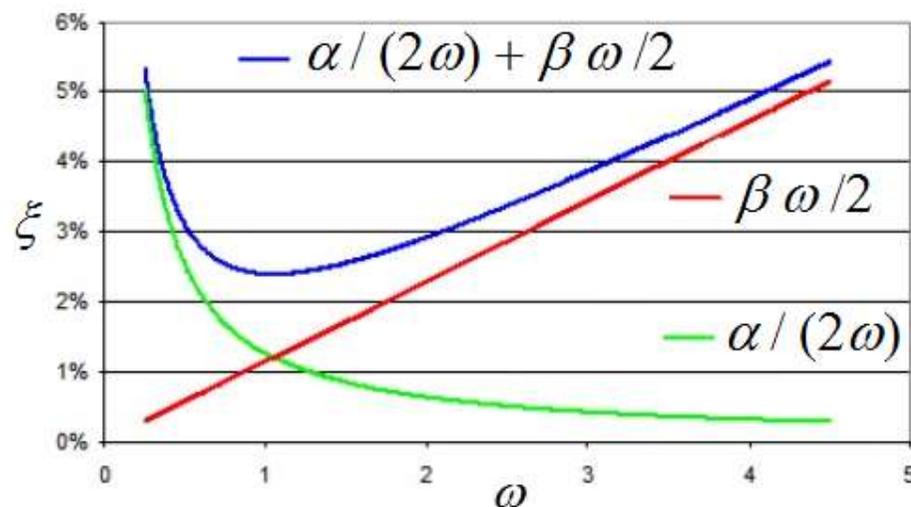
SMORZAMENTO ALLA RAYLEIGH

Come si è detto, la matrice di smorzamento può essere posta pari a $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$.

Premoltiplicando tutte le matrici per Φ^T e moltiplicando le matrici così ottenute per Φ , si ottengono quindi equazioni del tipo: $2 \omega_i \xi_i = \alpha + \beta (\omega_i)^2$, $2 \omega_j \xi_j = \alpha + \beta (\omega_j)^2$.

Noto allora il fattore di smorzamento ξ relativo a due frequenze di interesse, si possono determinare i coefficienti α e β . Alternativamente, qualora siano note più di due coppie di parametri ω e ξ , si possono determinare valori ottimali di α e β applicando opportune tecniche atte a minimizzare gli errori.

Si noti che ξ risulta direttamente proporzionale a ω quando si considera il contributo dato dalla matrice di rigidità ed inversamente proporzionale quando si considera il contributo dato dalla matrice di massa.

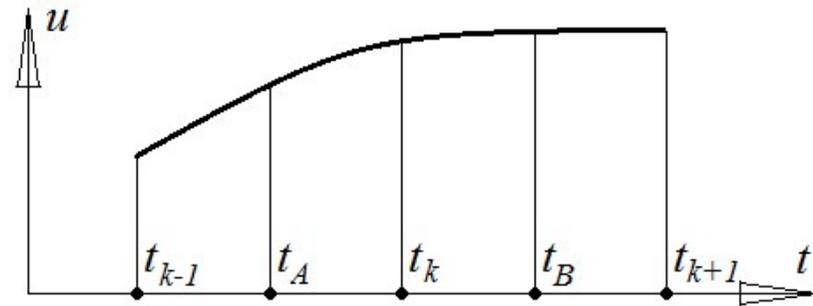


IL METODO DELLE DIFFERENZE CENTRALI

Il **METODO DELLE DIFFERENZE CENTRALI** consente di determinare la risposta incrementale di un sistema dinamico. È un *metodo esplicito*, in quanto si calcolano gli spostamenti \mathbf{u}_{k+1} imponendo l'equilibrio al tempo t_k . Velocità ed accelerazioni all'istante t_k sono approssimate in base agli spostamenti agli istanti $t_{k+1}=t_k-\Delta t$, $t_{k+1}=t_k+\Delta t$ e alle velocità agli istanti $t_A=t_k-\Delta t/2$, $t_B=t_k+\Delta t/2$.

Risulta: $\dot{\mathbf{u}}_k = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_{k-1}) / \Delta t$, $\ddot{\mathbf{u}}_k = (\dot{\mathbf{u}}_B - \dot{\mathbf{u}}_A) / \Delta t$.

Pertanto: $\ddot{\mathbf{u}}_k = ((\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) / \Delta t - (\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k-1}) / \Delta t) / \Delta t$
 $= (\mathbf{u}_{k+1} - 2\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k-1}) / \Delta t^2$



Si calcola quindi \mathbf{u}_{k+1} (*unico vettore incognito*) sostituendo le espressioni di $\dot{\mathbf{u}}_k$ e $\ddot{\mathbf{u}}_k$ nella equazione $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_k + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_k + \mathbf{K} \mathbf{u}_k = \mathbf{Q}_k$. Resta tuttavia il problema di definire un vettore \mathbf{u}_{k-1} all'istante iniziale t_{k-1} quando si impone l'equilibrio all'istante $t_k=t_0=0$. A tal fine, si può porre:

$$\mathbf{u}_{k-1} = 2\mathbf{u}_k - \mathbf{u}_{k+1} + \ddot{\mathbf{u}}_k \Delta t^2 = 2\mathbf{u}_k - 2\dot{\mathbf{u}}_k \Delta t - \mathbf{u}_{k+1} + \ddot{\mathbf{u}}_k \Delta t^2, \text{ essendo } \mathbf{u}_{k+1} = 2\dot{\mathbf{u}}_k \Delta t + \mathbf{u}_{k-1}.$$

Da qui si deduce $\mathbf{u}_{k-1} = \mathbf{u}_k - \dot{\mathbf{u}}_k \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{u}}_k \Delta t^2$.

IL METODO DI NEWMARK

Un *metodo implicito* permette di valutare la risposta di un sistema dinamico imponendo l'equilibrio all'istante $t_{k+1} = t_k + \Delta t$. Per esempio, nel caso del **METODO DI NEWMARK** ci si basa sulle relazioni:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_k + (1/2 - \beta) \ddot{\mathbf{u}}_k \Delta t^2 + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{k+1} \Delta t^2$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{k+1} = \dot{\mathbf{u}}_k + (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_k \Delta t + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{k+1} \Delta t.$$

Un caso particolare è quello in cui $\beta = 0$ e $\gamma = 1/2$. Si ottiene allora $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \dot{\mathbf{u}}_k \Delta t + 1/2 \ddot{\mathbf{u}}_k \Delta t^2$ ed $\dot{\mathbf{u}}_{k+1} = \dot{\mathbf{u}}_k + 1/2 \Delta t (\ddot{\mathbf{u}}_k + \ddot{\mathbf{u}}_{k+1})$, relazioni che potrebbero essere utilizzate nell'ambito della equazione governante $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{k+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{k+1} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{Q}_{k+1}$, avendo così $\ddot{\mathbf{u}}_{k+1}$ come unico vettore incognito. Per altro, ciò che risulta più evidente e più significativo è il fatto che l'espressione di \mathbf{u}_{k+1} scritta per $\beta = 0$ e $\gamma = 1/2$ coincide con quella che si ottiene con il *metodo delle differenze centrali*. In effetti, considerando le espressioni di $\dot{\mathbf{u}}_k$ e $\ddot{\mathbf{u}}_k$ basate su tale metodo, è sufficiente eliminare \mathbf{u}_{k-1} per ricavare la relazione $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \dot{\mathbf{u}}_k \Delta t + 1/2 \ddot{\mathbf{u}}_k \Delta t^2$.

OSSERVAZIONI SUL METODO DI NEWMARK

Il **METODO DI NEWMARK** è un **METODO DI INTEGRAZIONE** tale che, quando si pone $\beta=1/6$ e $\gamma=1/2$, può essere interpretato come una particolare tecnica di integrazione nel tempo che assume incrementi lineari delle accelerazioni durante un intervallo di tempo Δt . Posto infatti:

$\ddot{\mathbf{u}}(t) = \ddot{\mathbf{u}}_k + (\ddot{\mathbf{u}}_{k+1} - \ddot{\mathbf{u}}_k) (t - t_k) / \Delta t$, integrando si ricava:

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \dot{\mathbf{u}}_k + \ddot{\mathbf{u}}_k (t - t_k) + (\ddot{\mathbf{u}}_{k+1} - \ddot{\mathbf{u}}_k) (t - t_k)^2 / (2 \Delta t)$$

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_k + \dot{\mathbf{u}}_k (t - t_k) + \ddot{\mathbf{u}}_k (t - t_k)^2 / 2 + (\ddot{\mathbf{u}}_{k+1} - \ddot{\mathbf{u}}_k) (t - t_k)^3 / (6 \Delta t)$$

Ponendo $t = t_k + \Delta t = t_{k+1}$, si ottengono quindi $\dot{\mathbf{u}}(t_{k+1}) = \dot{\mathbf{u}}_{k+1}$ e $\mathbf{u}(t_{k+1}) = \mathbf{u}_{k+1}$:

$$\dot{\mathbf{u}}_{k+1} = \dot{\mathbf{u}}_k + 1/2 \Delta t (\ddot{\mathbf{u}}_k + \ddot{\mathbf{u}}_{k+1}) \quad , \quad \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_k + \Delta t^2 (\ddot{\mathbf{u}}_k / 3 + \ddot{\mathbf{u}}_{k+1} / 6).$$

Ovviamente, se $\beta=1/6$ e $\gamma=1/2$, queste equazioni corrispondono a quelle viste in precedenza:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_k + (1/2 - \beta) \ddot{\mathbf{u}}_k \Delta t^2 + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{k+1} \Delta t^2$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{k+1} = \dot{\mathbf{u}}_k + (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{u}}_k \Delta t + \gamma \ddot{\mathbf{u}}_{k+1} \Delta t.$$

UN COMMENTO SULLA STABILITÀ DEI METODI PASSO-PASSO PER L'INTEGRAZIONE NEL TEMPO

In genere, quando si considera un metodo di integrazione nel tempo, assume particolare rilevanza la **STABILITÀ DELL'ALGORITMO**, ossia la proprietà in virtù della quale un errore numerico presente ad un certo passo della storia di carico non implica un progressivo peggioramento nei passi successivi. Per esempio, il **METODO DI NEWMARK** risulta essere *incondizionatamente stabile* se si scelgono i parametri β e γ in modo tale che $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$.

Invece, il metodo è *condizionatamente stabile* se $\gamma \geq 1/2$, $\beta \leq 1/2$ e $\Delta t \leq (\gamma / 2 - \beta)^{-1/2} / \omega^*$, essendo ω^* la massima pulsazione naturale del sistema. In alternativa, si può considerare la disuguaglianza $\Delta t \leq (\gamma / 2 - \beta)^{-1/2} T^* / (2\pi)$, essendo $T^* = 2\pi / \omega^*$ il periodo associato ad ω^* .

Nel caso del **METODO DELLE DIFFERENZE CENTRALI**, in genere è opportuno imporre $\Delta t \leq T^* / (2\pi)$ e, comunque, l'algoritmo non è incondizionatamente stabile.

UN METODO IMPLICITO BASATO SULL'IPOTESI CHE SPOSTAMENTI E VELOCITÀ DIPENDANO DA VARIAZIONI LINEARI DI VELOCITÀ ED ACCELERAZIONI [1/2]

Si può ipotizzare che gli spostamenti e le velocità all'istante $t_{k+1}=t_k+\Delta t$ siano legati agli spostamenti e alle velocità all'istante t_k attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{k+1} &= \mathbf{u}_k + \dot{\mathbf{u}}(t - t_k) \Delta t \\ \dot{\mathbf{u}}_{k+1} &= \dot{\mathbf{u}}_k + \ddot{\mathbf{u}}(t - t_k) \Delta t\end{aligned}$$

Assumendo una crescita lineare di velocità ed accelerazioni e considerando l'istante $t = t_k + \Delta t / 2$, si ha: $\dot{\mathbf{u}}(t_k + \Delta t / 2) = 1/2 (\dot{\mathbf{u}}_{k+1} + \dot{\mathbf{u}}_k)$, $\ddot{\mathbf{u}}(t_k + \Delta t / 2) = 1/2 (\ddot{\mathbf{u}}_{k+1} + \ddot{\mathbf{u}}_k)$.

Naturalmente, il risultato è lo stesso che si ottiene integrando. Per esempio, per $\mathbf{u}(t)$ si ricava:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(t_{k+1}) &= \mathbf{u}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{\mathbf{u}}(t) dt = \mathbf{u}_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (\dot{\mathbf{u}}_{k+1} - \dot{\mathbf{u}}_k) (t - t_k) (1/\Delta t) dt \\ &= \mathbf{u}_k + 1/2 (\dot{\mathbf{u}}_{k+1} - \dot{\mathbf{u}}_k) (1/\Delta t) [(t - t_k)^2]_{t_k}^{t_{k+1}} = \mathbf{u}_k + 1/2 (\dot{\mathbf{u}}_{k+1} + \dot{\mathbf{u}}_k) \Delta t.\end{aligned}$$

UN METODO IMPLICITO BASATO SULL'IPOTESI CHE SPOSTAMENTI E VELOCITÀ DIPENDANO DA VARIAZIONI LINEARI DI VELOCITÀ ED ACCELERAZIONI [2/2]

Date le relazioni

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{k+1} + \dot{\mathbf{u}}_k) \Delta t \quad , \quad \dot{\mathbf{u}}_{k+1} = \dot{\mathbf{u}}_k + \frac{1}{2} (\ddot{\mathbf{u}}_{k+1} + \ddot{\mathbf{u}}_k) \Delta t,$$

si può considerare l'equazione governante $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}_{k+1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}_{k+1} + \mathbf{K} \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{Q}_{k+1}$.

È poi possibile esprimere \mathbf{u}_{k+1} in funzione di $\dot{\mathbf{u}}_{k+1}$, utilizzando la prima espressione riportata sopra. Fatto questo, ci si ritrova con un'equazione governante che dipende da $\dot{\mathbf{u}}_{k+1}$ e $\ddot{\mathbf{u}}_{k+1}$. Basta allora esprimere $\dot{\mathbf{u}}_{k+1}$ in funzione di $\ddot{\mathbf{u}}_{k+1}$ per ritrovarsi con $\ddot{\mathbf{u}}_{k+1}$ quale unico vettore incognito.

In alternativa, si può porre: $\dot{\mathbf{u}}_{k+1} = -\dot{\mathbf{u}}_k + 2 (\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) / \Delta t \quad , \quad \ddot{\mathbf{u}}_{k+1} = -\ddot{\mathbf{u}}_k + 2 (\dot{\mathbf{u}}_{k+1} - \dot{\mathbf{u}}_k) / \Delta t$.

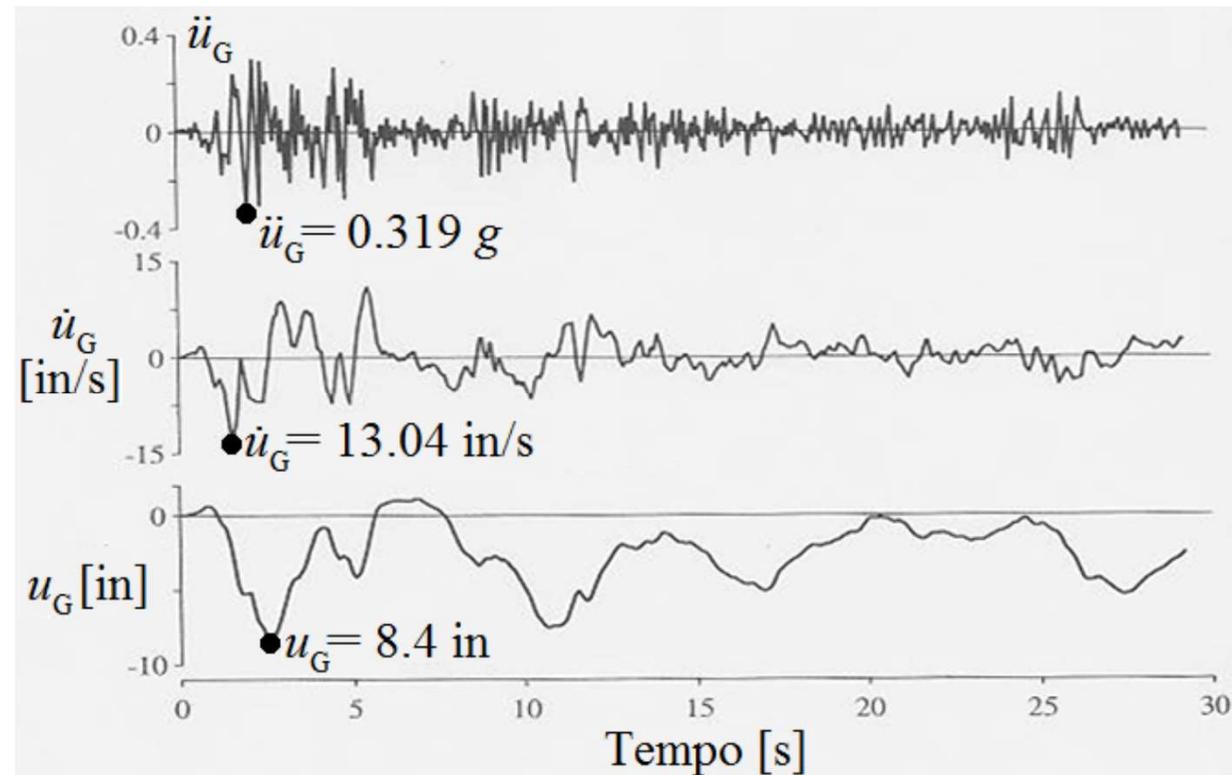
Sostituendo $\dot{\mathbf{u}}_{k+1}(\dot{\mathbf{u}}_{k+1})$ nell'equazione governante, questa risulta dipendere da \mathbf{u}_{k+1} ed $\ddot{\mathbf{u}}_{k+1}$.

Esprimendo quindi $\dot{\mathbf{u}}_{k+1}$ in funzione di \mathbf{u}_{k+1} , lo stesso \mathbf{u}_{k+1} risulta essere unico vettore incognito.

SPETTRO DI RISPOSTA (GENERALITÀ)

Lo spettro di risposta indica (sia in funzione della frequenza o del periodo di un oscillatore ad un grado di libertà, sia in funzione del fattore di smorzamento ξ) il valore assoluto massimo di una determinata grandezza fisica che caratterizza la risposta di quell'oscillatore ad un accelerogramma assegnato. Data, per esempio, l'accelerazione del terreno misurata in direzione nord-sud durante il terremoto di El Centro in California (1940)

ed indicata nella figura di fianco (assieme a velocità e spostamento, ottenuti per integrazione), è possibile determinare il valore assoluto massimo di qualsiasi grandezza fisica (per esempio, spostamento relativo e/o velocità e/o accelerazione della massa e/o forza trasmessa al supporto, etc.) in funzione della frequenza propria di vibrazione di quell'oscillatore e in funzione del fattore di smorzamento.



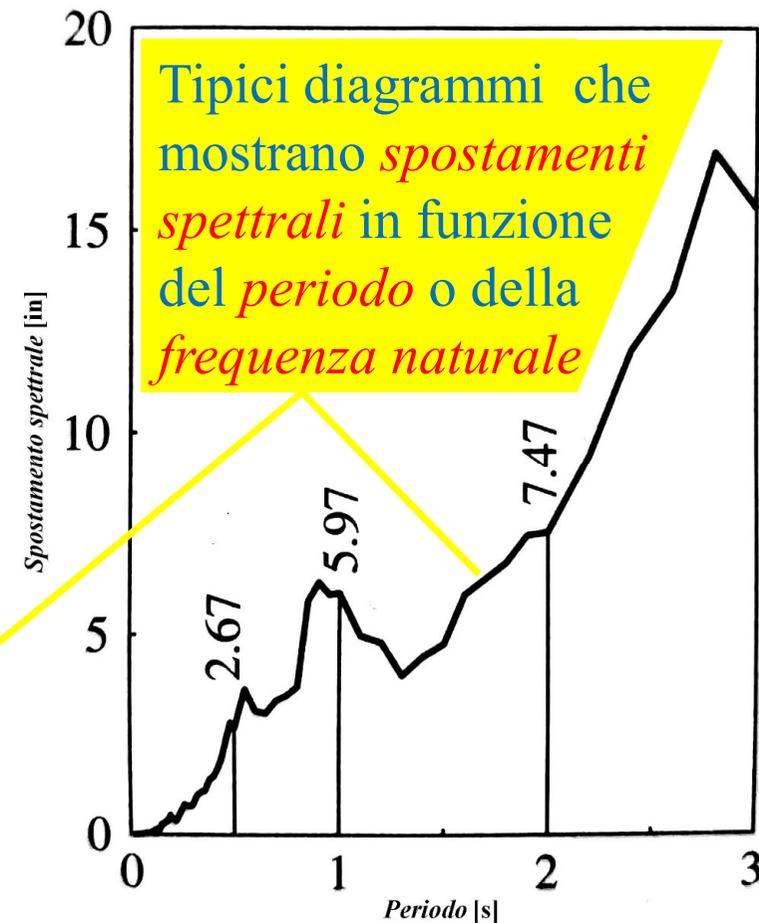
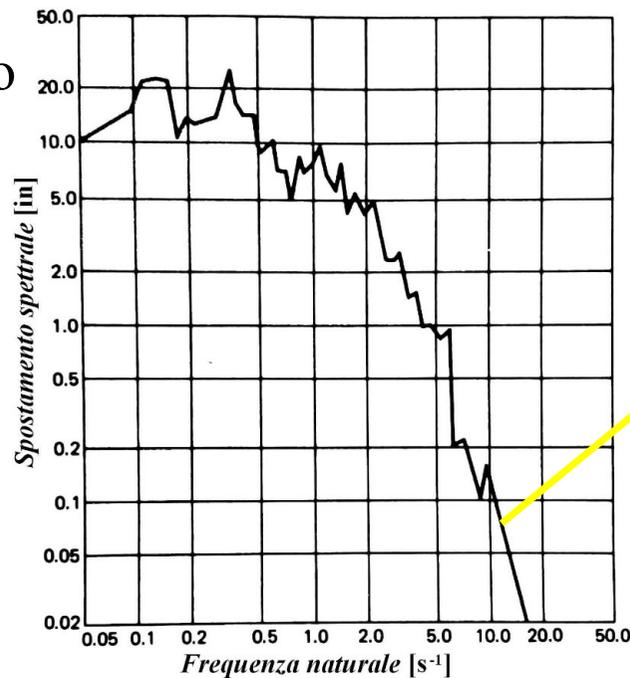
SPOSTAMENTO SPETTRALE, PSEUDO-VELOCITÀ SPETTRALE E PSEUDO-ACCELERAZIONE SPETTRALE

In particolare, si può prendere in considerazione il diagramma che (per un dato valore del periodo T o della frequenza f o della frequenza naturale ω) indica il *massimo valore assoluto dello spostamento relativo*, che viene detto *spostamento spettrale* e può essere indicato con il simbolo S_d , tipico della letteratura anglosassone. Moltiplicando questo valore per ω e ω^2 , si ottengono, rispettivamente, la cosiddetta *pseudo-velocità spettrale* S_v e la cosiddetta *pseudo-accelerazione spettrale* S_a . Riassumendo,

si ha: $S_d = |u(t)|_{max}$

$$S_v = \omega S_d$$

$$S_a = \omega^2 S_d = \omega S_v$$



LA PSEUDO-VELOCITÀ SPETTRALE E LA PSEUDO-ACCELERAZIONE SPETTRALE

Mentre lo *spostamento spettrale* S_d ha un ben preciso significato fisico, altrettanto non si può dire nel caso della *pseudo-velocità spettrale* S_v e della *pseudo-accelerazione spettrale* S_a .

Tuttavia, si rileva che la *pseudo-velocità spettrale* S_v è quella che, applicata alla massa dell'oscillatore, implicherebbe un'energia cinetica uguale alla massima energia di deformazione, cioè uguale all'energia di deformazione W che si ha in corrispondenza dello *spostamento spettrale* S_d . Risulta infatti $W = \frac{1}{2} k (S_d)^2 = \frac{1}{2} (\omega^2 m) (S_d)^2 = \frac{1}{2} m (S_v)^2$

Per quanto riguarda la *pseudo-accelerazione spettrale* S_a , questa corrisponde al massimo valore assoluto dell'accelerazione totale nel caso di un sistema non smorzato. Data infatti l'equazione $m \ddot{u} + k u = -m \ddot{x}_s$ o, alternativamente, l'equazione $m \ddot{x} + k u = 0$ (essendo \ddot{x}_s l'accelerazione del terreno, \ddot{x} l'accelerazione della massa ed u lo spostamento relativo della massa rispetto al terreno), è chiaro che in corrispondenza di $|u(t)| = S_d$, si ha $|\ddot{x}(t)| = (k/m) S_d = \omega^2 S_d = S_a$.

DIAGRAMMA "TRIPARTITO" [1/4]

Utilizzando scale logaritmiche è possibile riunire in un unico diagramma l'andamento dello *spostamento spettrale* S_d , della *pseudo-velocità spettrale* S_v e della *pseudo-accelerazione spettrale* S_a in funzione del periodo T o della frequenza f .

Per esempio, essendo $S_v = \omega S_d = S_d 2\pi / T$,
si ricava: $\lg(S_v) = \lg(2\pi S_d) - \lg(T)$.

Dunque, fissato un certo valore di S_d , si ha una relazione di tipo lineare fra $\lg(S_v)$ e $\lg(T)$.

In particolare, il legame fra $\lg(S_v)$ e $\lg(T)$ è rappresentato attraverso una retta inclinata di un angolo pari a $3\pi/4$ rad nel piano $\lg(S_v)$ - $\lg(T)$. Così, con riferimento al caso della figura a fianco, quando $S_d = 7.47$ in, il luogo dei punti tali che $\lg(S_v) = \lg(2\pi \cdot 7.47) - \lg(T)$ risulta essere la retta indicata in rosso.

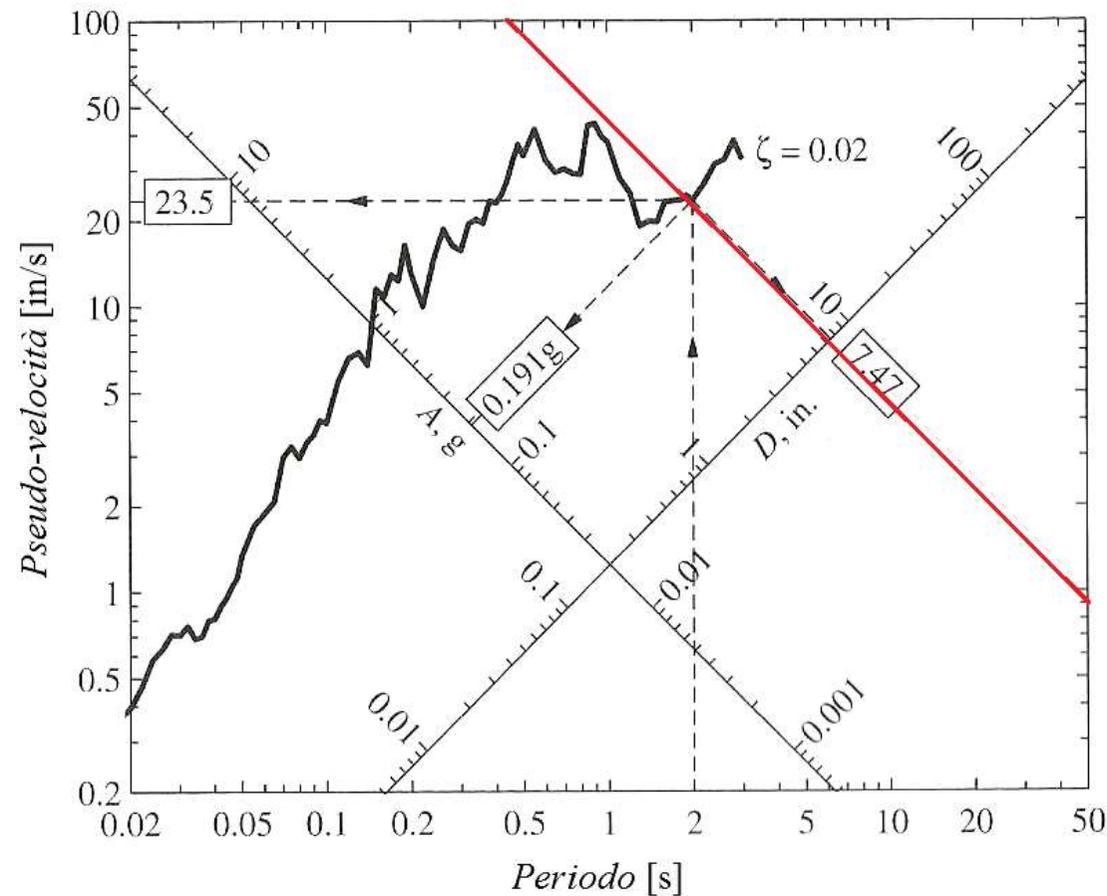


DIAGRAMMA "TRIPARTITO" [2/4]

In modo del tutto analogo si può considerare la relazione $S_v = S_a / \omega = S_a T / (2\pi)$, da cui si ricava: $\lg(S_v) = \lg(1/2 S_a / \pi) + \lg(T)$.

Anche in questo caso, fissato un certo valore di S_a , si ha una relazione di tipo lineare fra $\lg(S_v)$ e $\lg(T)$.

Questa volta però, il legame fra $\lg(S_v)$ e $\lg(T)$ è rappresentato attraverso una retta inclinata di un angolo pari a $\pi/4$ rad nel piano $\lg(S_v)$ - $\lg(T)$.

Per esempio, come si vede nel caso della figura a fianco, quando $S_a = 0.191 g$, il luogo dei punti tali che $\lg(S_v) = \lg(1/2 \cdot 0.191 g / \pi) + \lg(T)$ risulta essere la retta indicata in rosso.

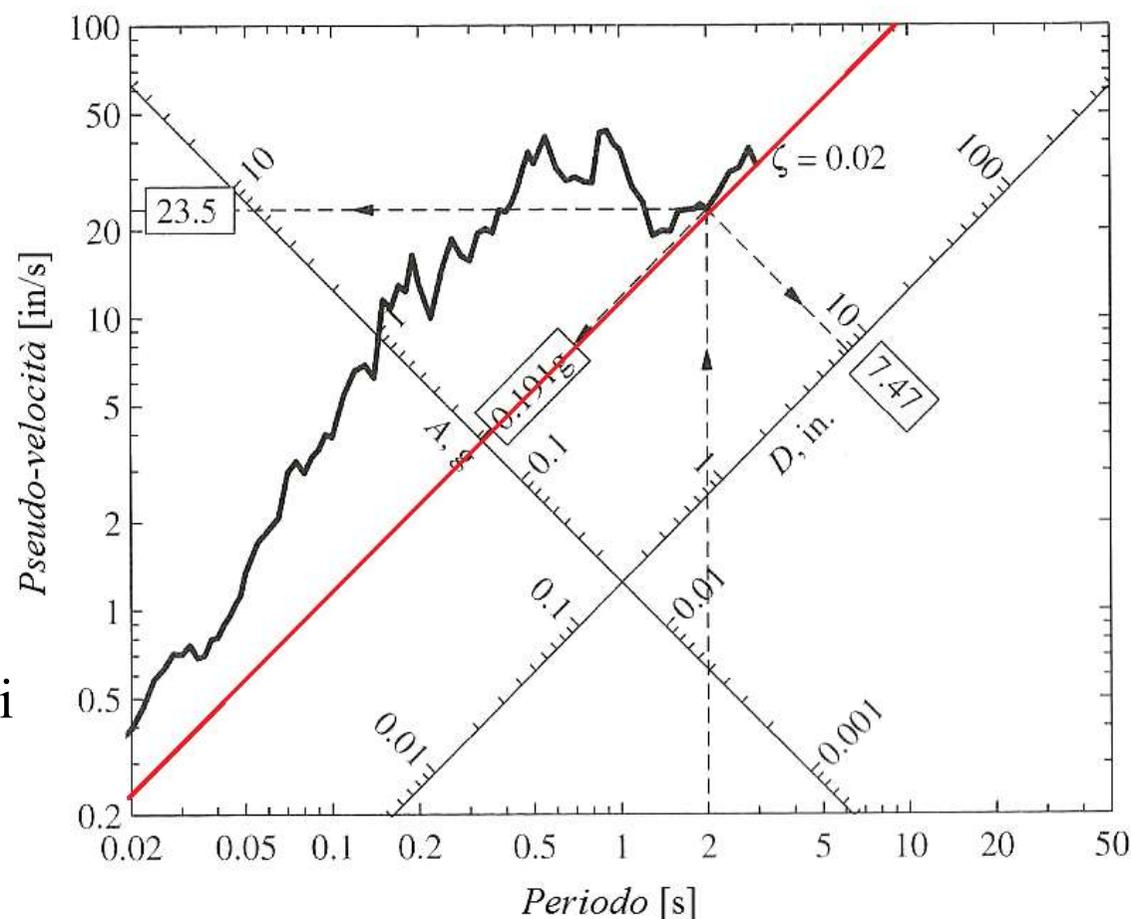


DIAGRAMMA "TRIPARTITO" [3/4]

Dal caso specifico per il quale si è sostanzialmente fissata l'attenzione sul punto in cui $S_v = 23.5 \text{ in/s}$, $S_d = 7.47 \text{ in}$ ed $S_a = 0.191 \text{ g}$, è immediato il passaggio alla rappresentazione generale indicata qui di fianco. Si noti che le diverse curve si riferiscono a diversi valori del fattore di smorzamento.

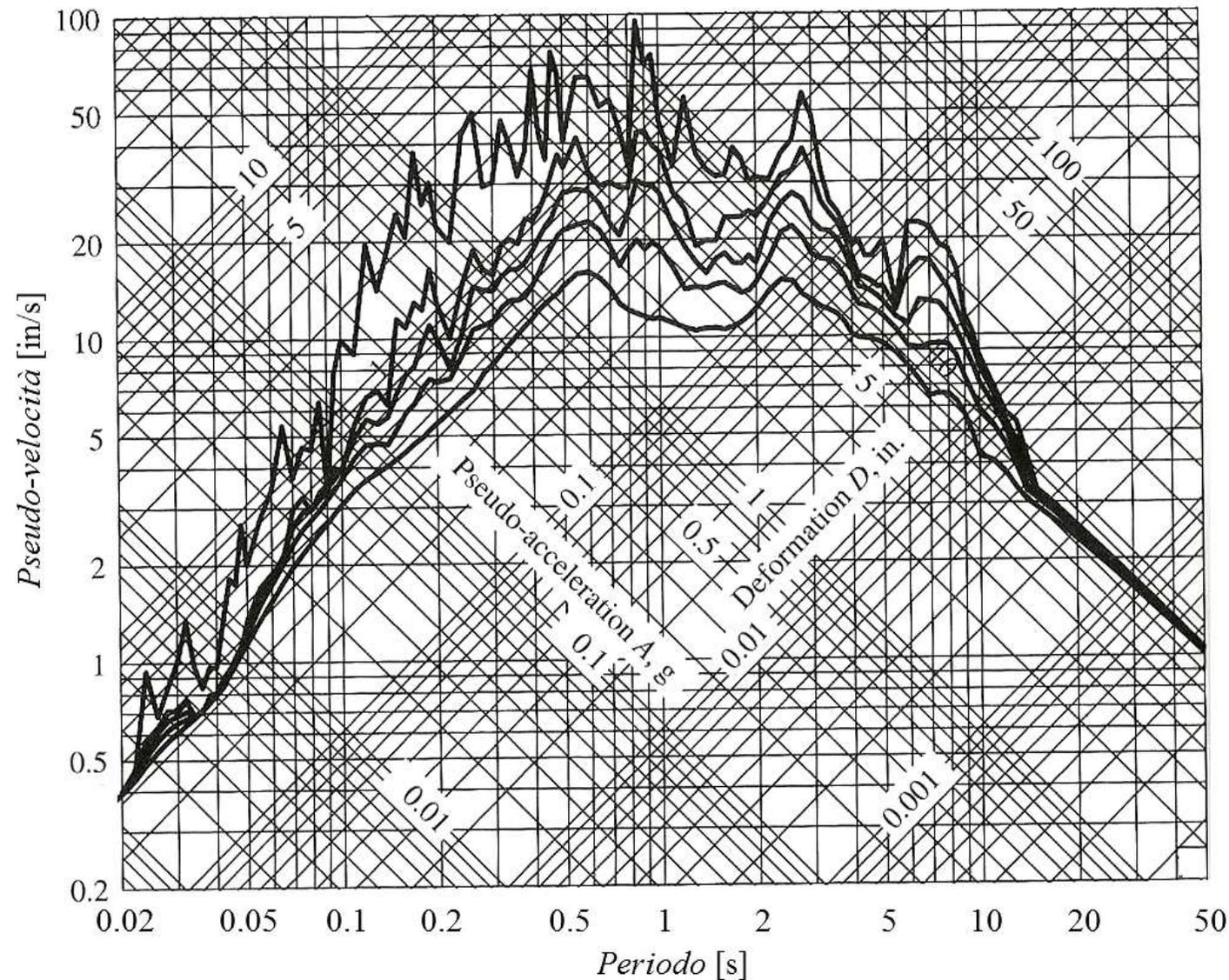
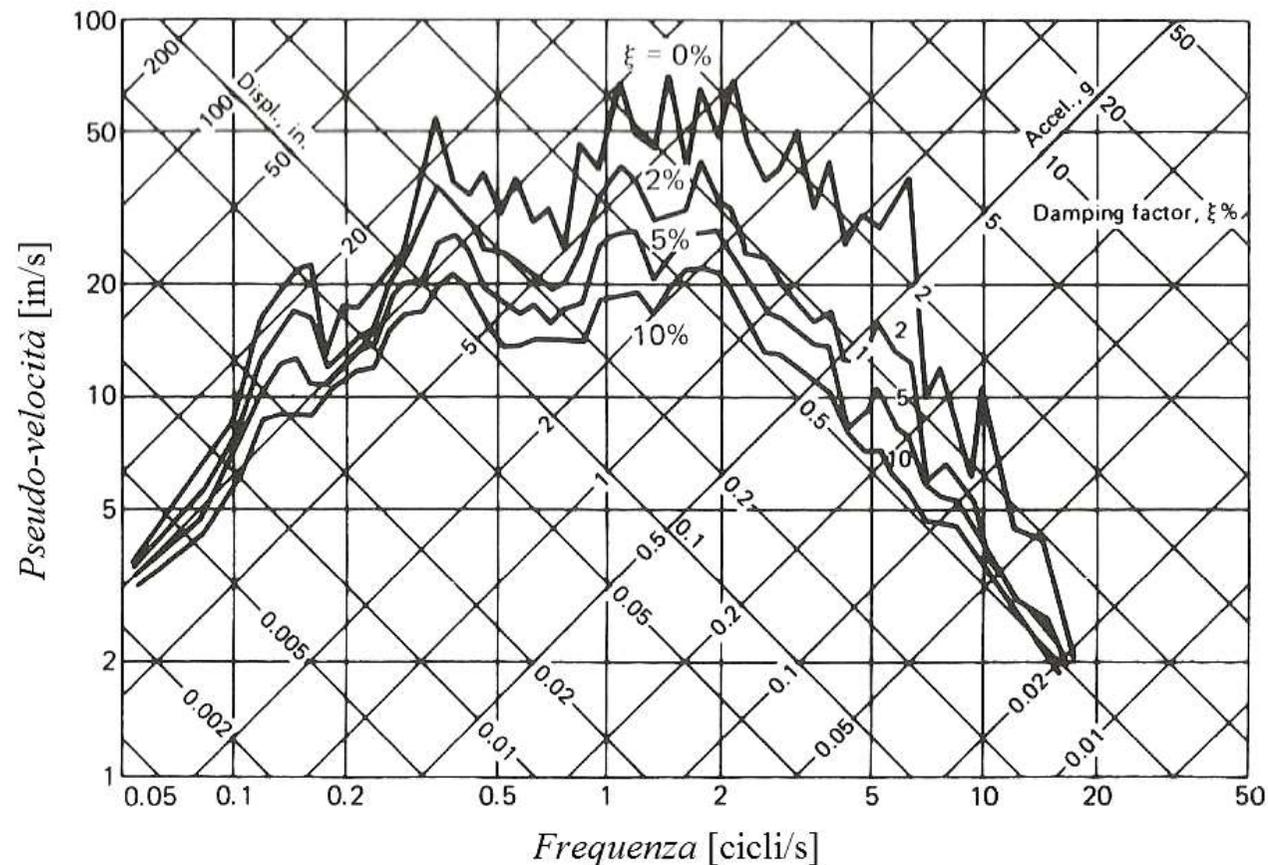


DIAGRAMMA "TRIPARTITO" [4/4]

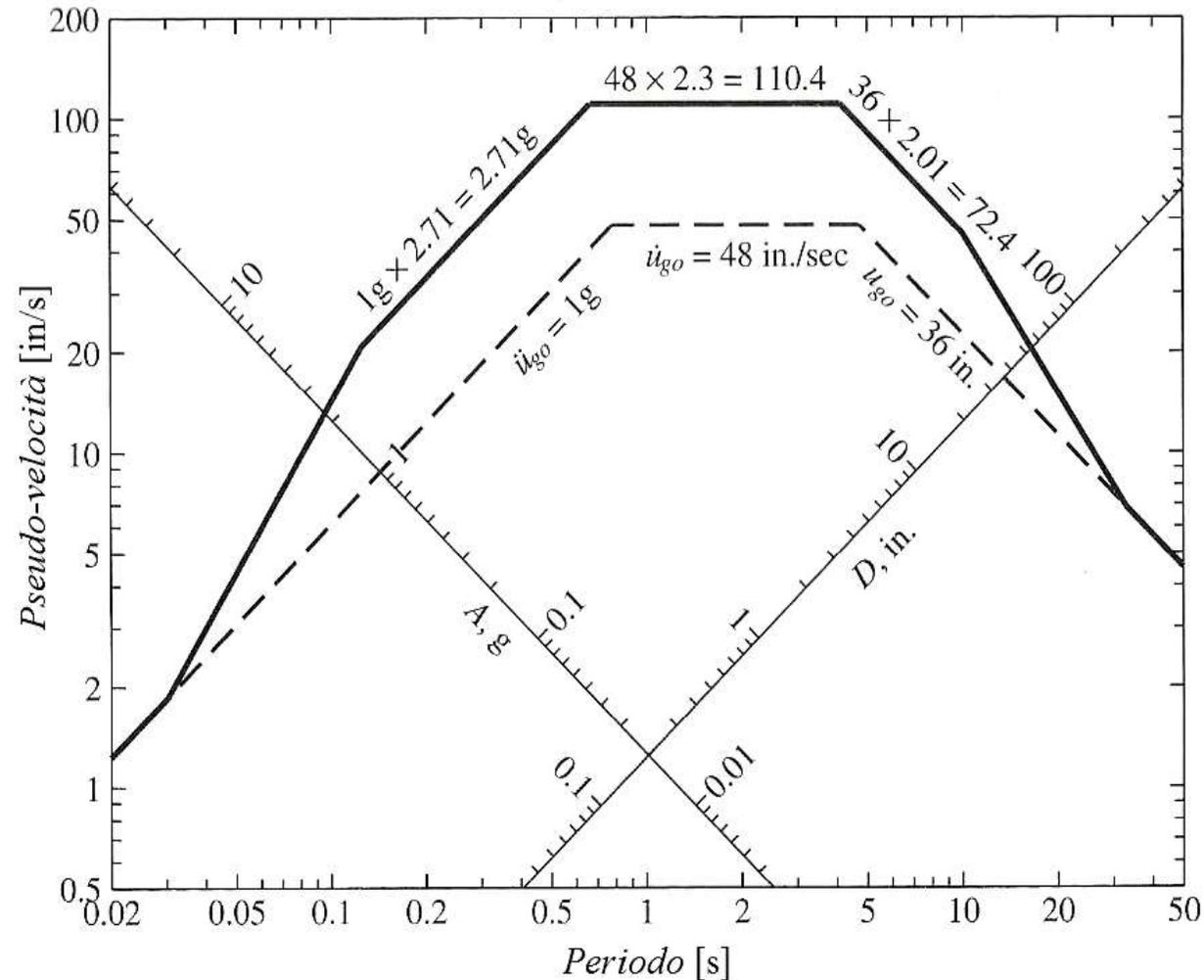
Come si è già osservato, quale variabile indipendente è tipico utilizzare il periodo T o, alternativamente, la frequenza f . In questo secondo caso si ha: $S_v = \omega S_d = 2\pi f S_d$ e $S_v = S_a / \omega = S_a / (2\pi f)$. Si ha quindi: $\lg(S_v) = \lg(2\pi S_d) + \lg(f)$ e $\lg(S_v) = \lg(1/2 S_a / \pi) - \lg(f)$.

Pertanto, fissato un certo valore di S_d o S_a , si hanno relazioni di tipo lineare pure fra $\lg(S_v)$ e $\lg(f)$. Questa volta, tuttavia, le rette che rappresentano il legame fra $\lg(S_v)$ e $\lg(f)$ per assegnati valori di S_d risultano essere inclinate di un angolo pari a $\pi/4$ rad. Sono invece inclinate di un angolo pari a $3\pi/4$ rad le rette che rappresentano lo stesso legame per assegnati valori di S_a , come si vede nella figura a fianco.



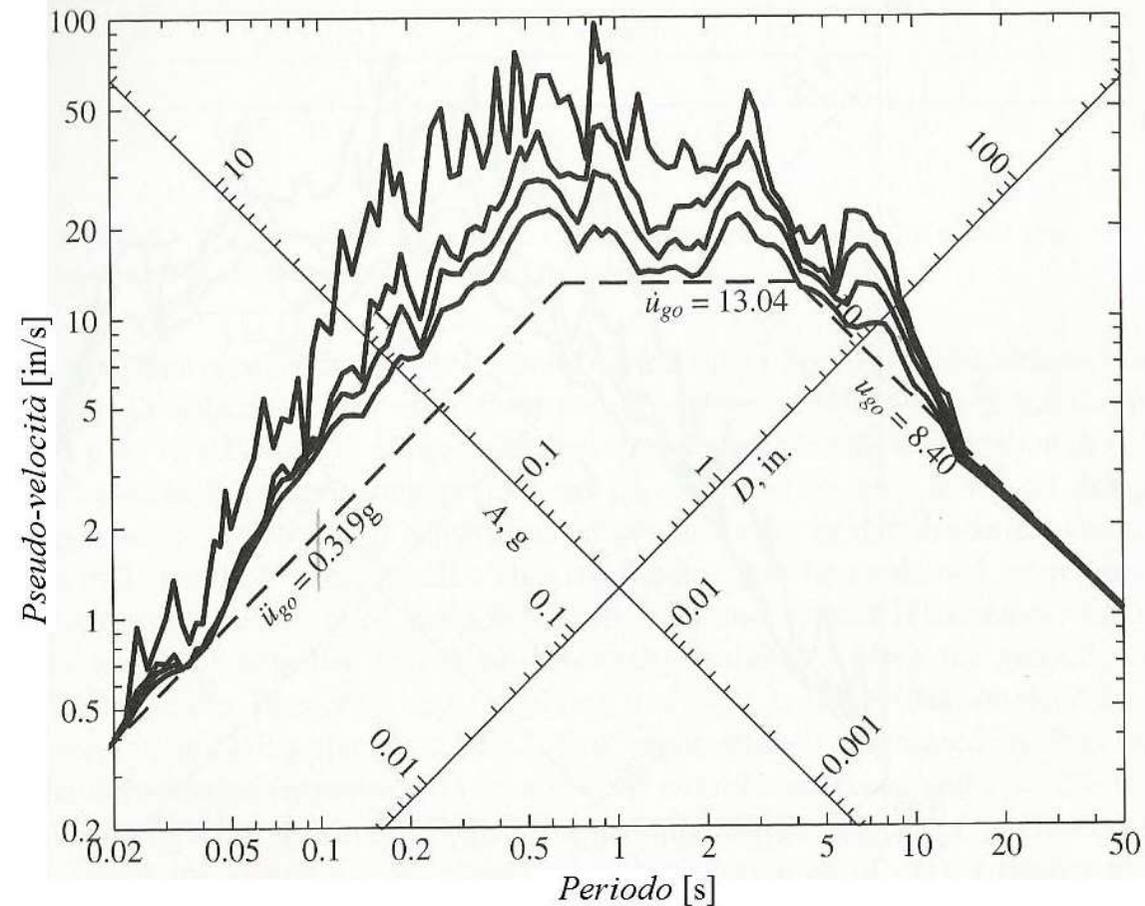
SPETTRO DI PROGETTO [1/8]

Al fine di rendere disponibili informazioni di interesse pratico per la fase di progettazione di una struttura, occorre definire spettri che (sulla base di eventi sismici del passato e di opportune elaborazioni statistiche) siano in grado di indicare in modo ragionevolmente attendibile valori attesi di S_d , S_v ed S_a . Questo scopo viene raggiunto analizzando statisticamente, per ciascun sito ritenuto significativo, i dati raccolti in passato e definendo uno spettro convenzionale di forma regolare, tipo quello indicato nella figura con tratto continuo, spettro che si riferisce al caso di un fattore di smorzamento $\xi = 0.05$.



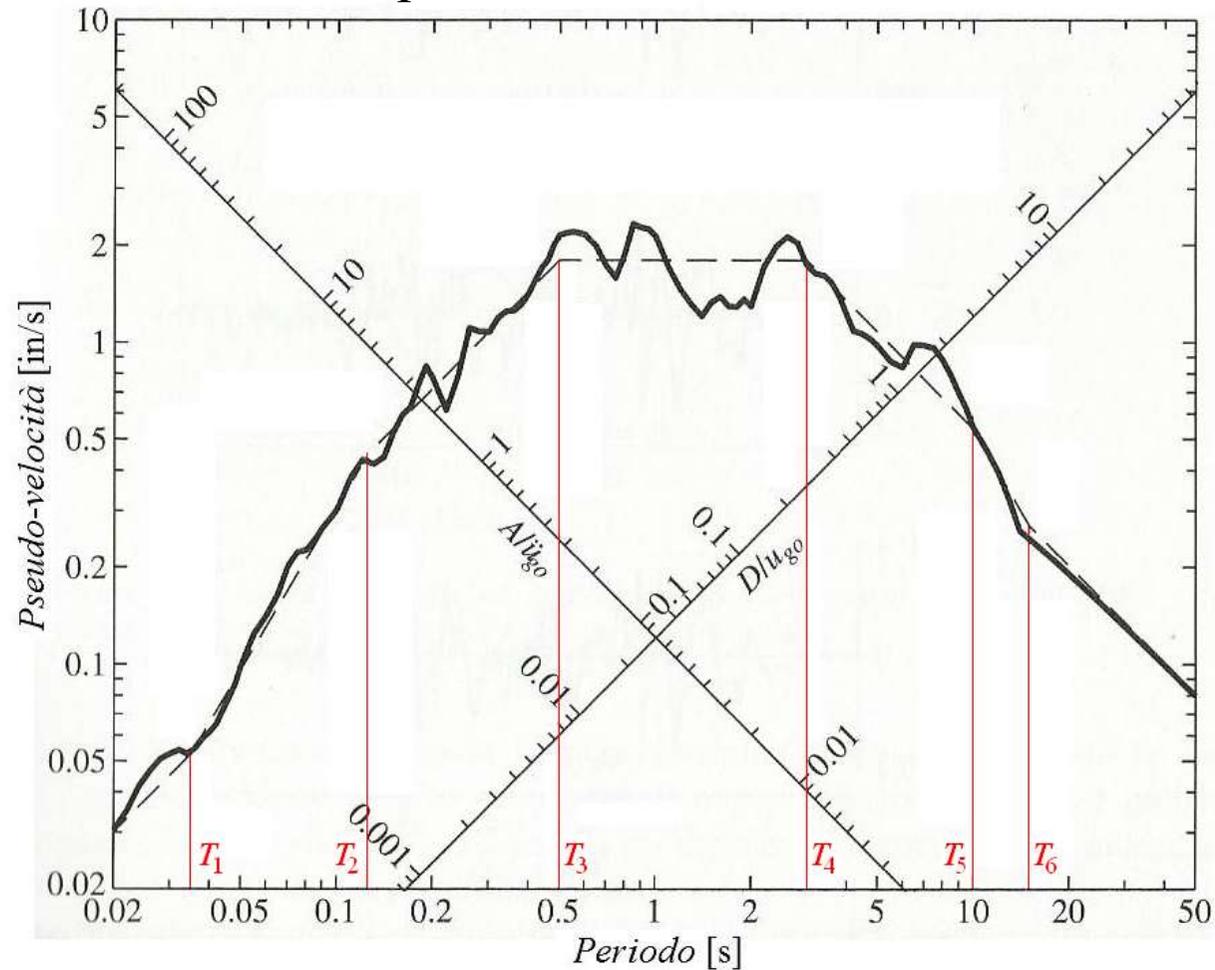
SPETTRO DI PROGETTO [2/8]

Quanto appena visto, può essere messo in evidenza ancor meglio considerando la figura indicata qui sotto, che riguarda gli spettri di risposta ottenuti in base all'accelerogramma di El Centro per diversi valori del fattore di smorzamento ($\xi = 0, 0.02, 0.05, 0.10$). In particolare si nota che nelle parti estreme dei diagrammi, cioè per valori bassi e valori elevati del periodo, i diagrammi stessi tendono a sovrapporsi. Questo non avviene per caso, ma in virtù di ben precise motivazioni meccaniche, come verrà precisato in seguito. Inoltre, si dovrebbe osservare che esiste un insieme di periodi (in questo caso compreso fra circa 0.5 e 3 s) in cui le pseudo-velocità tendono ad oscillare intorno ad un valor medio (compreso fra circa 15 e 50 in/s nel caso in esame).



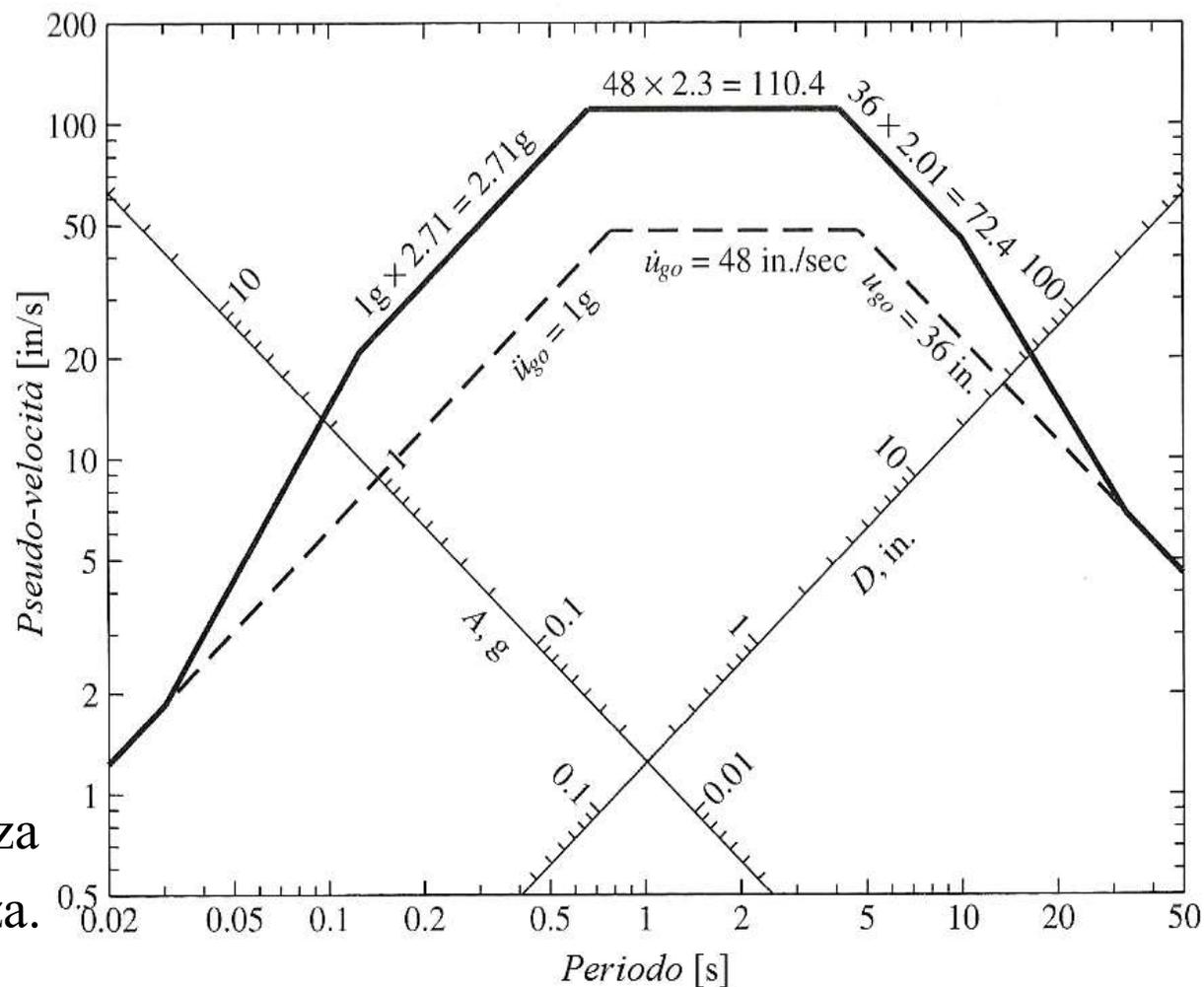
SPETTRO DI PROGETTO [3/8]

Soffermando l'attenzione su uno dei diagrammi considerati in precedenza (per esempio quello per $\xi = 0.05$), si nota che è possibile approssimarlo con una linea spezzata che mette in luce tre regioni: una (per $T \leq T_3$) in cui la risposta di un oscillatore dipende dall'accelerazione del terreno, una (per $T_3 \leq T \leq T_4$) in cui dipende dalla velocità del terreno ed una (per $T \geq T_4$) in cui dipende dallo spostamento del terreno. Come verrà messo in evidenza in seguito, si rileva pure che, per $T \leq T_1$, l'accelerazione dell'oscillatore tende a coincidere con quella del terreno. Invece, quando $T \geq T_6$, avviene che lo spostamento dell'oscillatore tende a coincidere con quello del terreno.



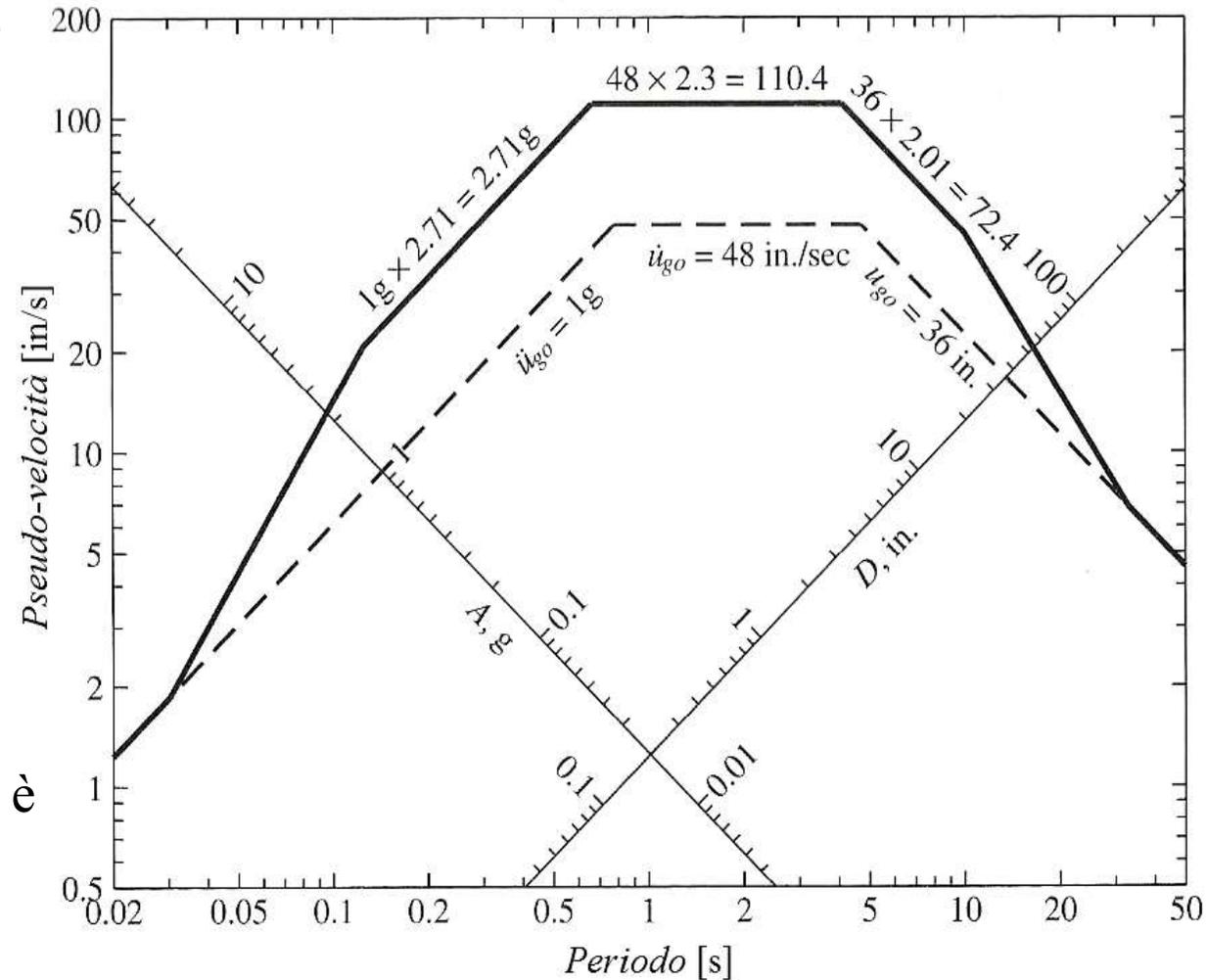
SPETTRO DI PROGETTO [4/8]

La linea indicata con tratto continuo vuole rappresentare un possibile **SPETTRO DI PROGETTO** e può essere definita in base ad alcune considerazioni preliminari. Innanzi tutto, come si è sottolineato in precedenza, si può ricordare che, in genere, è possibile schematizzare uno spettro con una spezzata costituita da sette tratti: cominciando da sinistra, il primo e il terzo presentano pendenze fra loro simili, il quarto è orizzontale, il quinto ed il settimo hanno di nuovo pendenze simili fra loro. In particolare, nel caso indicato della figura a destra, si può fissare l'attenzione sui periodi $T_1 \cong 0.03$ s, $T_2 \cong 0.125$ s, $T_3 \cong 0.6$ s, $T_4 \cong 4$ s, $T_5 \cong 10$ s e $T_6 \cong 33$ s in corrispondenza dei quali si rilevano cambiamenti di pendenza.



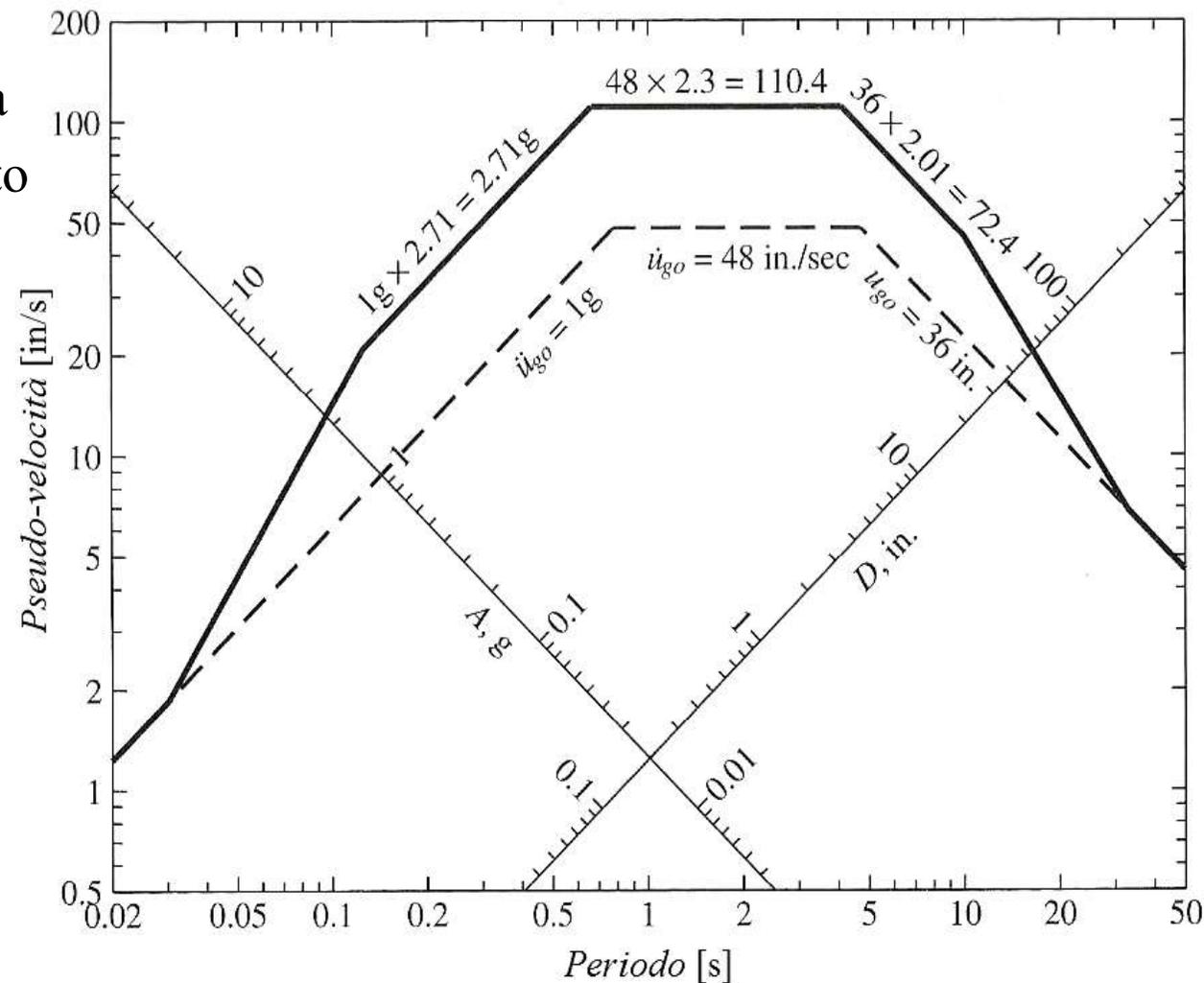
SPETTRO DI PROGETTO [5/8]

Sottolineando che lo spettro di progetto vuole essere rappresentativo di spettri ricavati sperimentalmente in una certa zona sismica, si richiama l'attenzione sul fatto che, per tutti questi spettri, i primi tratti (cioè quelli che, nel caso in esame, terminano in corrispondenza del periodo $T_1 \cong 0.03$ s) presentano la stessa pendenza ed indicano quindi la stessa accelerazione (si ricorda infatti che le linee con inclinazione di 45° indicano luoghi di punti caratterizzati dalla medesima accelerazione). Questo si spiega osservando che, per bassi periodi, il sistema è molto rigido e quindi la sua accelerazione tende a coincidere con quella del terreno.



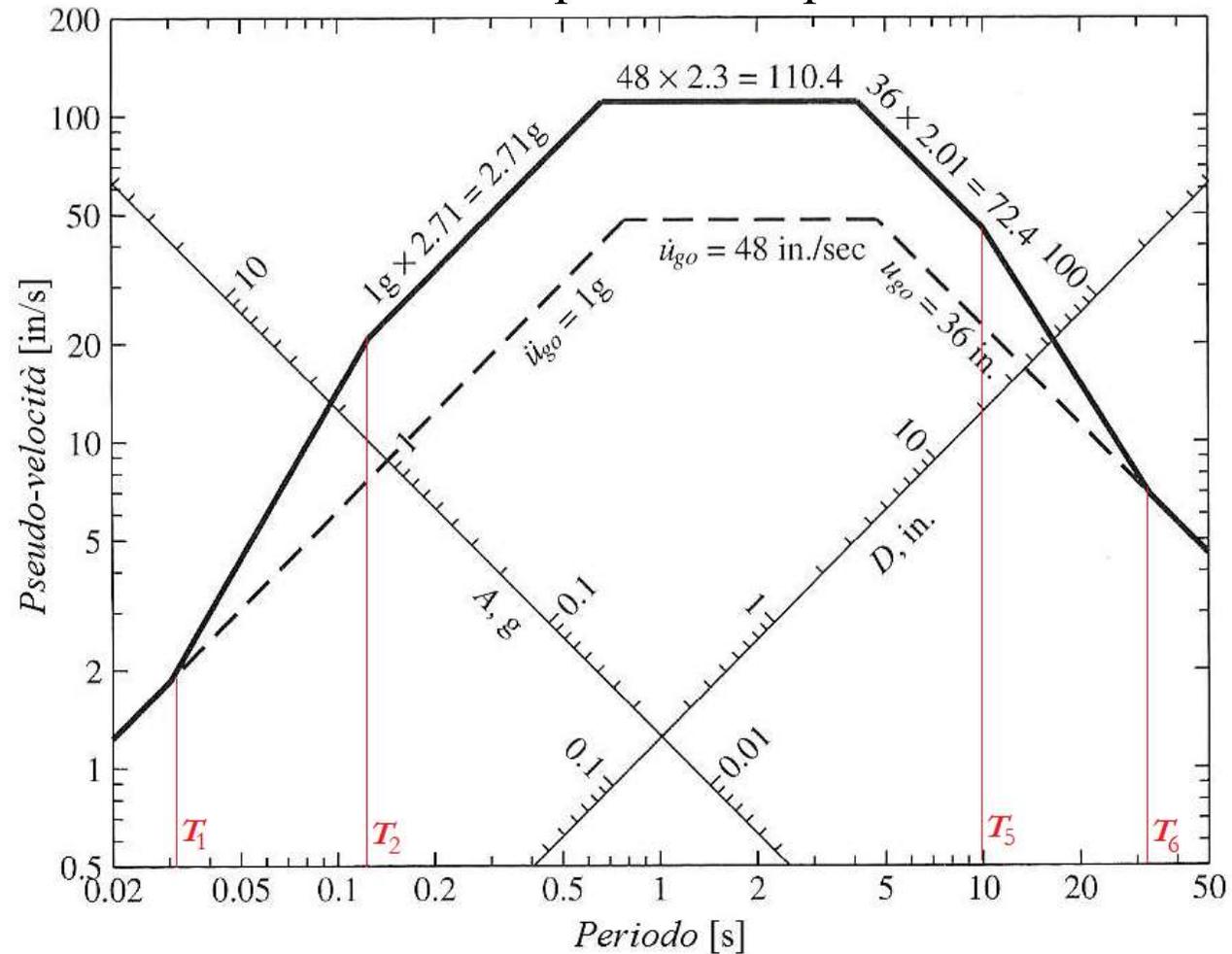
SPETTRO DI PROGETTO [6/8]

Analogamente, pure gli ultimi tratti (cioè quelli che hanno inizio in corrispondenza del periodo $T_6 \approx 33$ s nel caso in esame) presentano la stessa pendenza e pertanto indicano, questa volta, lo stesso spostamento relativo rispetto al suolo (si ricorda infatti che le linee con inclinazione di 135° si riferiscono a luoghi di punti caratterizzati dallo stesso spostamento relativo). Questo è dovuto al fatto che, per periodi elevati, il sistema ha rigidità trascurabile e tende a restare fermo. Di conseguenza, il suo spostamento relativo rispetto al terreno tende a coincidere con lo spostamento assoluto del terreno.



SPETTRO DI PROGETTO [7/8]

A questo punto, si possono tracciare le tre linee tratteggiate che sono rappresentative del massimo spostamento, della massima velocità e della massima accelerazione prevedibili per il terreno in una data zona. In base ad opportuni fattori di amplificazione che dipendono, fra l'altro, dal fattore di smorzamento, è possibile tracciare le linee continue che corrispondono al terzo, quarto e quinto tratto dello spettro di progetto. Il primo e l'ultimo tratto sono parte delle linee tratteggiate all'inizio, mentre il secondo ed il sesto tratto sono ottenuti tracciando due segmenti fra i punti le cui ascisse sono, da un lato $T_1 \cong 0.03$ s e $T_2 \cong 0.125$ s, dall'altro $T_5 \cong 10$ s e $T_6 \cong 33$ s.



SPETTRO DI PROGETTO [8/8]

Gli spettri di progetto definiti dalle normative indicano, per un dato sito e per un dato periodo di ritorno, la pseudoaccelerazione spettrale in funzione del periodo. A titolo di esempio, nella figura (tratta dal testo *Dynamics of structures* di A.K. Chopra) vengono indicati due grafici rappresentativi di due possibili eventi sismici: uno di modesta intensità con epicentro vicino al sito di interesse *(a)* ed uno di notevole intensità con epicentro lontano da tale sito *(b)*.

In questo caso, come spettro di progetto si può adottare quello ottenuto

considerando l'involuppo dei due grafici.

