

ndicato con  $x_{st} = F/k$  lo spostamento che subirebbe la massa se la  
 osse applicata staticamente.

teressante osservare che la (71) risulta analoga all'equazione che si  
 se, in assenza della forza esterna  $F \sin \bar{\omega}t$ , fosse imposto all'estremità  
 a molla uno spostamento variabile con legge  $y(t) = y \sin \bar{\omega}t$ . In tal caso  
 accelerazione totale cui sarebbe sottoposta la massa risulterebbe pari  
 mentre la forza di richiamo elastico risulterebbe ancora proporzionale  
 tamento  $x$ . Si avrebbe pertanto la seguente equazione del moto:

$$m(\ddot{x} + \ddot{y}) + kx = 0 \quad (73)$$

$$m\ddot{x} + kx = -\bar{\omega}^2 y m \sin \bar{\omega}t \quad (74)$$

orza fittizia  $-\bar{\omega}^2 y m \sin \bar{\omega}t$ , che deriva dallo spostamento impresso al-  
 tà della molla, prende il nome di forza di trascinamento.

soluzione della (72), e quindi della (74) se si pone  $F = -m\bar{\omega}^2 y$ ,  
 la sola definizione dell'integrale particolare, essendo l'integrale ge-  
 nell'omogenea associata quello già esaminato al par. 2. Posto quindi  
 e particolare nella forma:

$$x_1(t) = X \sin \bar{\omega}t \quad (75)$$

do nella (72) si ottiene:

$$-X\bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}t + \omega^2 X \sin \bar{\omega}t = x_{st}\omega^2 \sin \bar{\omega}t \quad (76)$$

ale risulta, ponendo  $\beta = \bar{\omega}/\omega$ :

$$X = x_{st} \frac{\omega^2}{\omega^2 - \bar{\omega}^2} = x_{st} \frac{1}{1 - \beta^2} \quad (77)$$

a così:

$$x_1(t) = x_{st} \frac{1}{1 - \beta^2} \sin \bar{\omega}t = x_{st} N \sin(\bar{\omega}t - \varphi) \quad (78)$$

osto il "fattore di applicazione":

*amplification*

$$N = \frac{1}{|1 - \beta^2|} \quad (79)$$

e l'angolo di fase:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 && \text{per } \beta < 1 \\ \varphi &= \pi && \text{per } \beta > 1 \end{aligned} \quad (80)$$

Nella figura 14 è riportato l'andamento di  $N$  in funzione del  
 rapporto  $\beta$ .

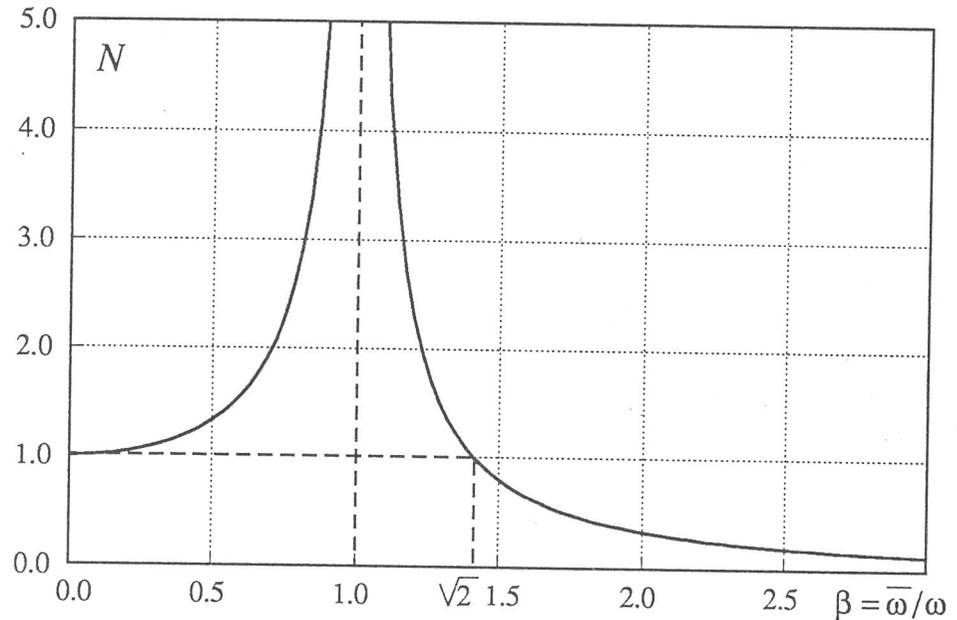


Fig. 14

Si può osservare quindi che per  $0 < \beta < \sqrt{2}$  risulta sempre  $N > 1$  e quindi  
 la forza pulsante determina un'amplificazione dello spostamento statico  $x_{st}$ :  
 viceversa una riduzione si ottiene per  $\beta > \sqrt{2}$  come risulta facilmente  
 dalla (79).

Inoltre spostamento e forza applicata risultano in fase solo quando  
 $\beta < 1$ ; se  $\beta > 1$  invece, spostamento e forza risultano in opposizione. Le (80)  
 stanno ad indicare una discontinuità dell'angolo  $\varphi$  quando  $\beta = 1$ : in realtà  
 in quest'ultimo caso la (77) cade in difetto e dev'essere sostituita da un'altra  
 relazione, come si vedrà in seguito.

Escludendo quindi questo caso particolare, la soluzione generale della (72)  
 è:

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + x_{st} N \sin(\bar{\omega}t - \varphi) \quad (81)$$

ed il moto della massa risulta ottenuto dalla sovrapposizione di due moti armonici di pulsazione pari rispettivamente ad  $\omega$  e  $\bar{\omega}$ .

Come sempre, anche in questo caso, le condizioni iniziali permettono di definire le due costanti  $A$  e  $B$ .

Infine nel caso in cui sia  $\omega \simeq \bar{\omega}$  si verificano i "battimenti" ed il moto si presenta come illustrato nella figura 15 dove  $\omega = 2\pi$  ed  $\bar{\omega} = 1,1\omega$ .

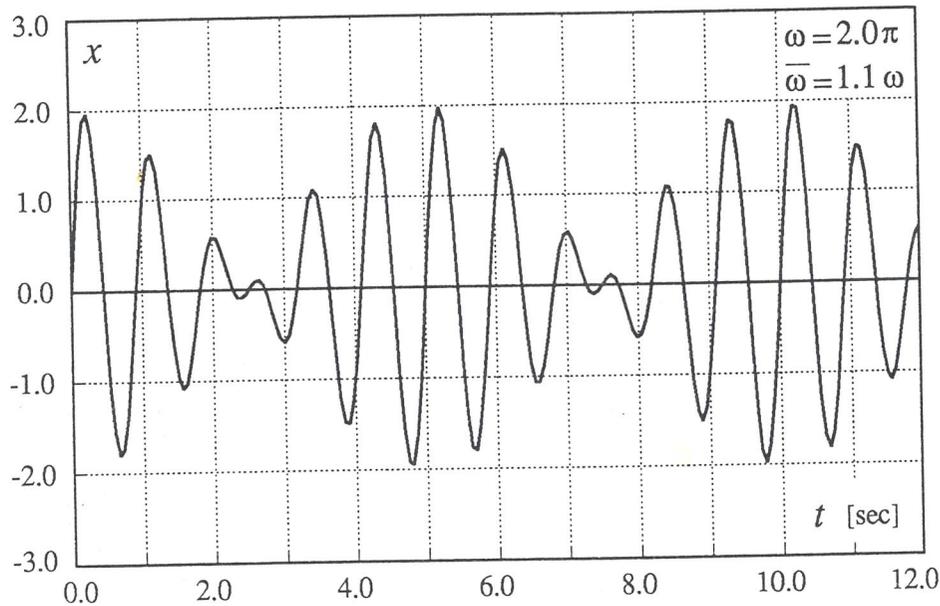


Fig. 15

Come già detto, se risulta  $\bar{\omega} = \omega$ , la (78) cade in difetto ma si ottiene facilmente un integrale particolare ponendo:

$$x_1(t) = Xt \cos \omega t = Xt \cos \bar{\omega} t \quad (82)$$

Sostituendo la (82) nella (72) essendo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= X \cos \omega t - Xt \omega \sin \omega t \\ \ddot{x}_1(t) &= -X\omega \sin \omega t - X\omega \sin \omega t - Xt\omega^2 \cos \omega t = \\ &= -2X\omega \sin \omega t - Xt\omega^2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (83)$$

si ottiene:

$$-2X\omega \sin \omega t - Xt\omega^2 \cos \omega t + Xt\omega^2 \cos \omega t = x_{st}\omega^2 \cos \omega t$$

da cui:

$$X = -x_{st} \frac{\omega}{2}$$

L'integrale generale assume pertanto la forma:

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t - x_{st} \frac{\omega}{2} t \cos \omega t$$

e le ampiezze delle oscillazioni tendono a crescere indefinitamente del tempo, come indicato in figura 16.

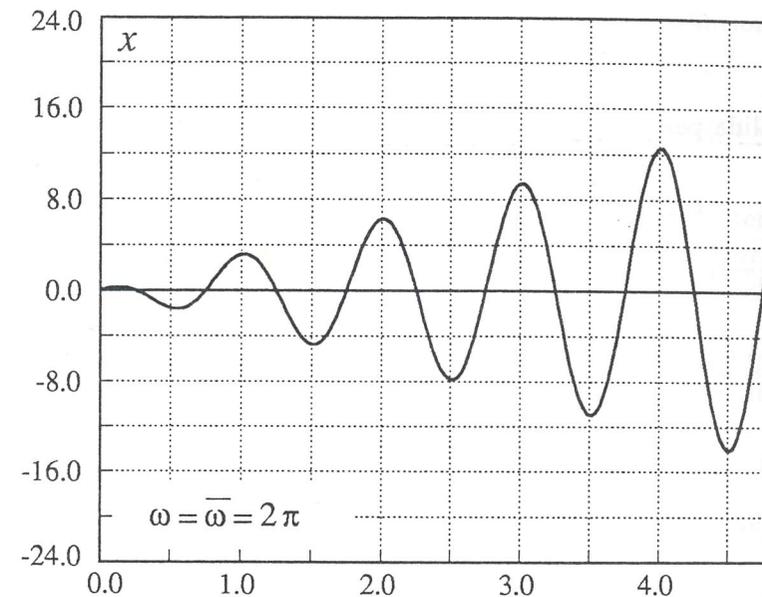


Fig. 16

## 5. Oscillazioni forzate da una pulsante in presenza di :

Si consideri ora la forza pulsante  $F \sin \bar{\omega} t$  applicata ad un sistema dotato di smorzamento viscoso. L'equazione del moto si scrive

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \sin \bar{\omega} t$$

o della massa risulta ottenuto dalla sovrapposizione di due moti ar-  
pulsazione pari rispettivamente ad  $\omega$  e  $\bar{\omega}$ .  
e sempre, anche in questo caso, le condizioni iniziali permettono di  
e due costanti  $A$  e  $B$ .

e nel caso in cui sia  $\omega \simeq \bar{\omega}$  si verificano i "battimenti" ed il moto si  
come illustrato nella figura 15 dove  $\omega = 2\pi$  ed  $\bar{\omega} = 1,1\omega$ .

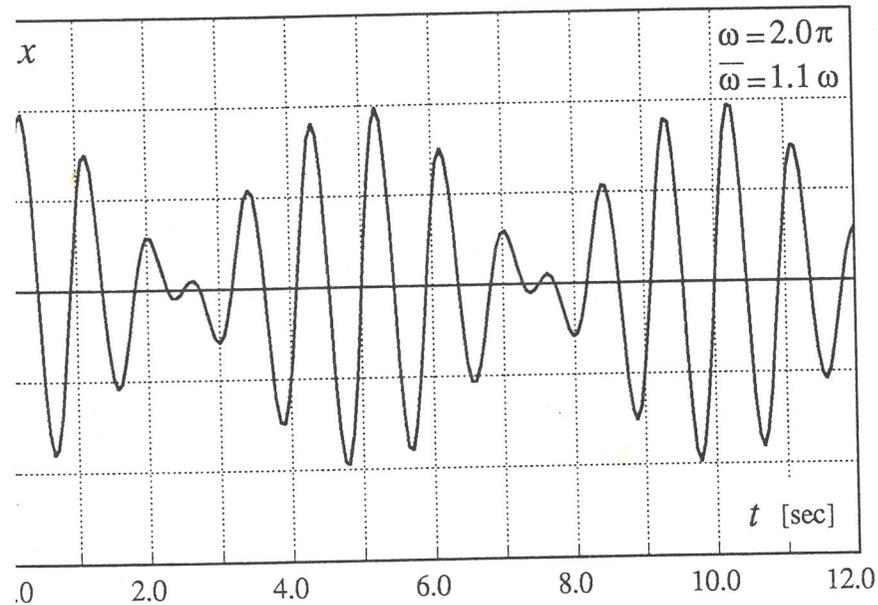


Fig. 15

ne già detto, se risulta  $\bar{\omega} = \omega$ , la (78) cade in difetto ma si ottiene  
te un integrale particolare ponendo:

$$x_1(t) = Xt \cos \omega t = Xt \cos \bar{\omega} t \quad (82)$$

stituendo la (82) nella (72) essendo:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= X \cos \omega t - Xt \omega \sin \omega t \\ \ddot{x}_1(t) &= -X\omega \sin \omega t - X\omega \sin \omega t - Xt\omega^2 \cos \omega t = \\ &= -2X\omega \sin \omega t - Xt\omega^2 \cos \omega t \end{aligned} \quad (83)$$

si ottiene:

$$-2X\omega \sin \omega t - Xt\omega^2 \cos \omega t + Xt\omega^2 \cos \omega t = x_{st}\omega^2 \sin \omega t \quad (84)$$

da cui:

$$X = -x_{st} \frac{\omega}{2} \quad (85)$$

L'integrale generale assume pertanto la forma:

$$x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t - x_{st} \frac{\omega}{2} t \cos \omega t \quad (86)$$

e le ampiezze delle oscillazioni tendono a crescere indefinitamente all'aumentare del tempo, come indicato in figura 16.

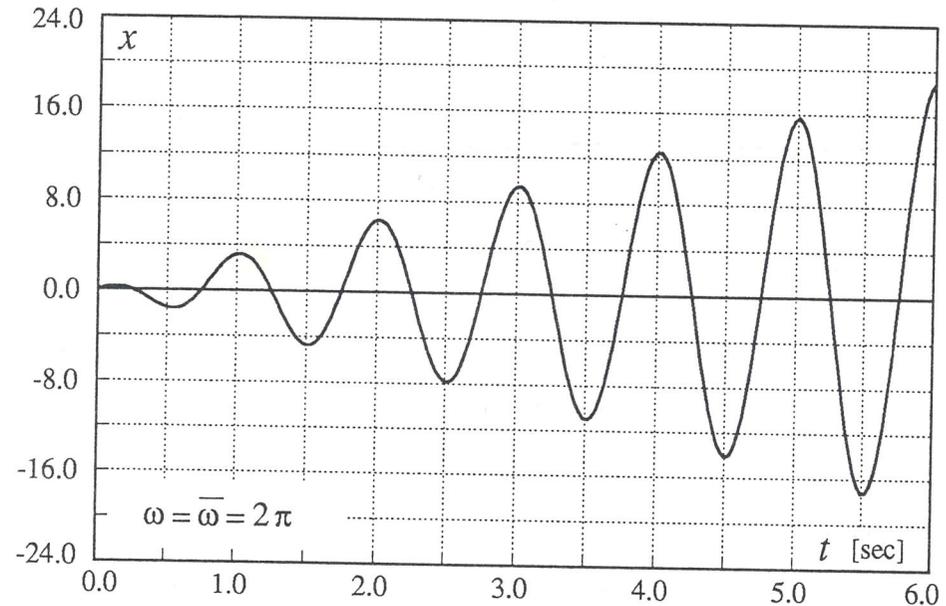


Fig. 16

### 5. Oscillazioni forzate da una pulsante in presenza di smorzamento

Si consideri ora la forza pulsante  $F \sin \bar{\omega} t$  applicata ad un oscillatore  
dotato di smorzamento viscoso. L'equazione del moto si scrive in tal caso:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F \sin \bar{\omega} t \quad (87)$$

anto alla pulsazione propria  $\omega$  dell'oscillatore non smorzato, ed a  $\bar{\omega} = \omega\sqrt{1 - \nu^2}$  dell'oscillatore smorzato, può definirsi una terza pulsazione  $\bar{\omega}$  che dà luogo alla massima amplificazione dell'effetto provocato da una pulsazione sull'oscillatore smorzato.

Da così dalla (103):

$$\bar{\omega} = \omega\sqrt{1 - 2\nu^2} \quad (104)$$

stituendo infine la (102) nella (100) si ottiene:

$$N_{\max} = [4\nu^4 + 4\nu^2(1 - 2\nu^2)]^{-1/2} = \frac{1}{2\nu\sqrt{1 - \nu^2}} \quad (105)$$

Quando i risultati  $\nu \ll 1$ , può con sufficiente approssimazione scriversi:

$$N_{\max} \approx \frac{1}{2\nu} \quad (106)$$

La (103) risulta quindi che la massima amplificazione si ha sempre per  $\beta = 1$ . Nelle figure 17 e 18 sono riportati rispettivamente gli andamenti di  $N$  in funzione di  $\beta$ .

L'esame delle curve  $N(\beta)$ , che prendono il nome di "curve di risonanza", ci porta a una prima osservazione di carattere generale.

La caratterizzazione di un carico quale "statico" ovvero "dinamico" non è in tutto rigore valida in linea teorica: infatti, in un'ottica rigorosa, tutti i carichi hanno una velocità di crescita finita e pertanto sarebbero dinamici.

Per una linea approssimata, per conseguire una semplificazione nelle applicazioni pratiche, possono considerarsi statici quei carichi per i quali i risultati in tale caso infatti la velocità di crescita del carico è così piccola in confronto alla velocità delle oscillazioni proprie del sistema, che il coefficiente di amplificazione dinamica risulta molto prossimo ad 1.

Al contrario, per valori di  $\beta$  molto grandi, il coefficiente di amplificazione tende a zero, a significare che nel corso delle oscillazioni proprie della struttura il carico sinusoidale varia così velocemente da produrre un effetto nullo, quale si avrebbe se il carico stesso fosse stato applicato in modo statico.

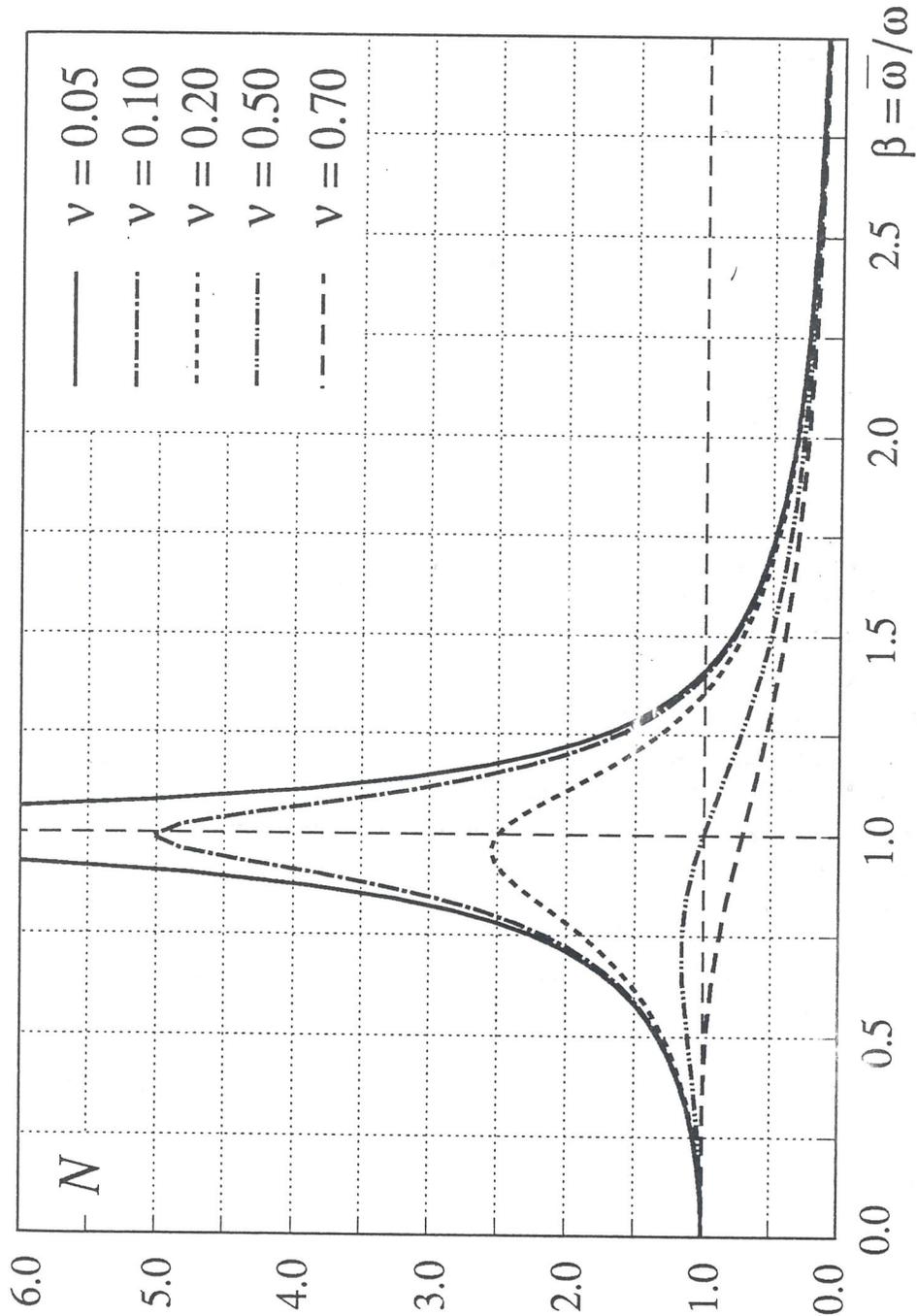


Fig. 17

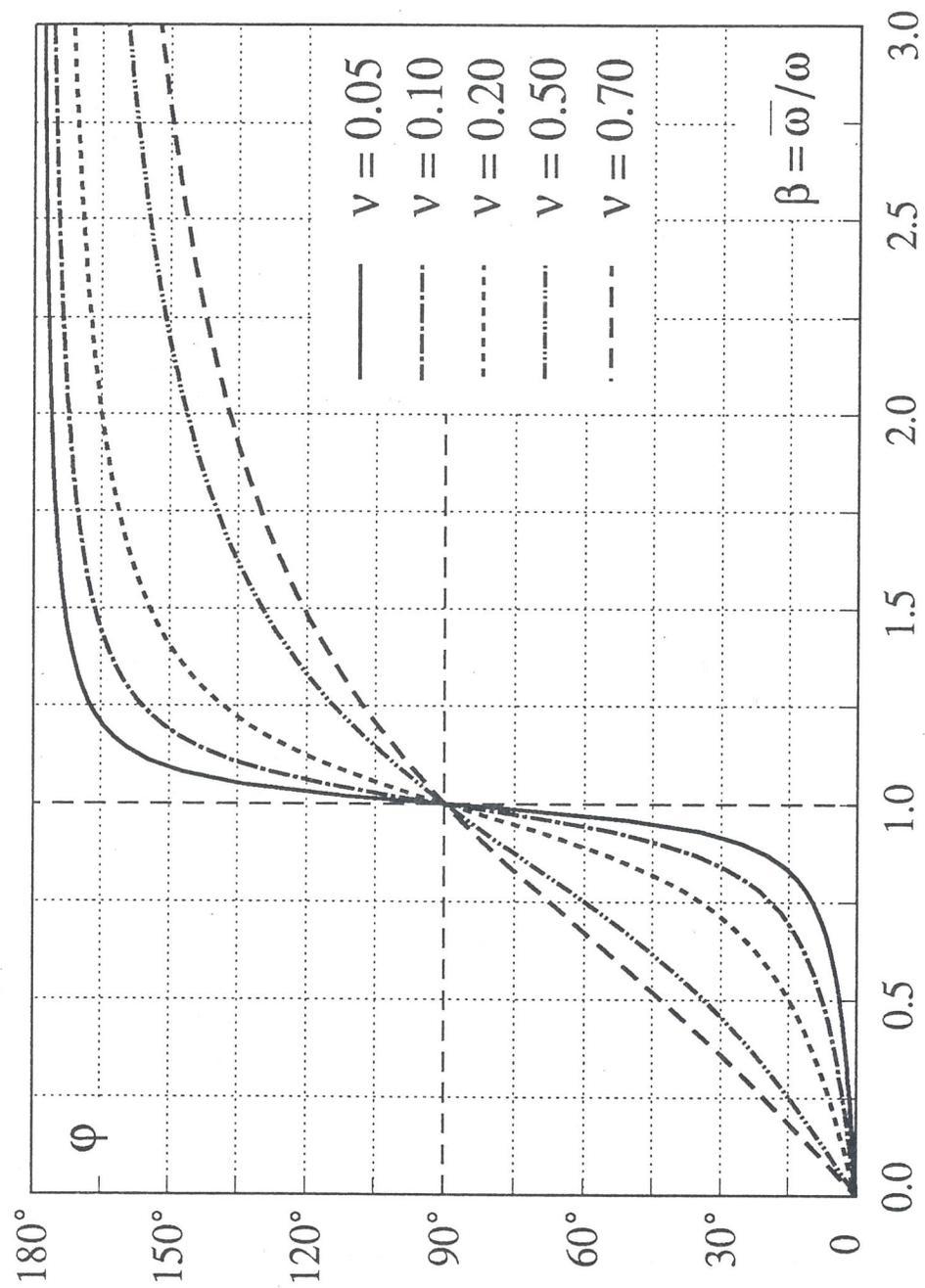


Fig. 18

costanti valgono:

$$B = \frac{F_1}{k} \tag{143}$$

$$A = \frac{F_1}{k} \frac{\nu\omega}{\Omega}$$

(142) diventa quindi:

$$x(t) = \frac{F_1}{k} \left[ 1 - e^{-\nu\omega t} \left( \frac{\nu\omega}{\Omega} \sin \Omega t + \cos \Omega t \right) \right] \tag{144}$$

Il moto descritto dalla (144) è un moto oscillatorio smorzato che tende a  $F_1/k$  per  $t \rightarrow \infty$ . È interessante esaminare brevemente la risposta dell'oscillatore alla forza  $F_1$  applicata al tempo zero anche negli altri due casi particolari per  $b = b_{cri}$  e per  $b > b_{cri}$ . Ricordando le altre due soluzioni omogenee della (139), ritrovate al paragrafo 3, e procedendo in perfetta analogia con la (144), si riscontrano le due seguenti soluzioni:

$$x(t) = \frac{F_1}{k} [1 - e^{-\omega t} (1 + t\omega)] \tag{145}$$

per  $\nu = 1$  e:

$$x(t) = \frac{F_1}{k} \left[ 1 - \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \right) \right] \tag{146}$$

per  $\nu > 1$ , avendo posto:

$$\lambda_1 = -\omega (\nu - \sqrt{\nu^2 - 1}) \tag{147}$$

$$\lambda_2 = -\omega (\nu + \sqrt{\nu^2 - 1})$$

La (145) che la (146), così come la (144) valida per  $\nu < 1$ , tendono a  $F_1/k$  per  $t \rightarrow \infty$ , ma la natura del moto risulta sostanzialmente diversa. Si definisce tempo di assestamento quello necessario affinché il massimo spostamento risulti compreso fra  $0,95F_1/k$  e  $1,05F_1/k$ . A parità di smorzamento  $\nu$ , tale tempo si riduce all'aumentare di  $\omega$  mentre a parità di  $\omega$  risulta minimo per  $\nu = 0,7$ . Nella figura 27 gli andamenti della funzione  $x(t)$  scritti dalle (144), (145) e (146) sono riportati per alcuni valori dello smorzamento  $\nu$ , a meno dello spostamento statico  $F_1/k$ .

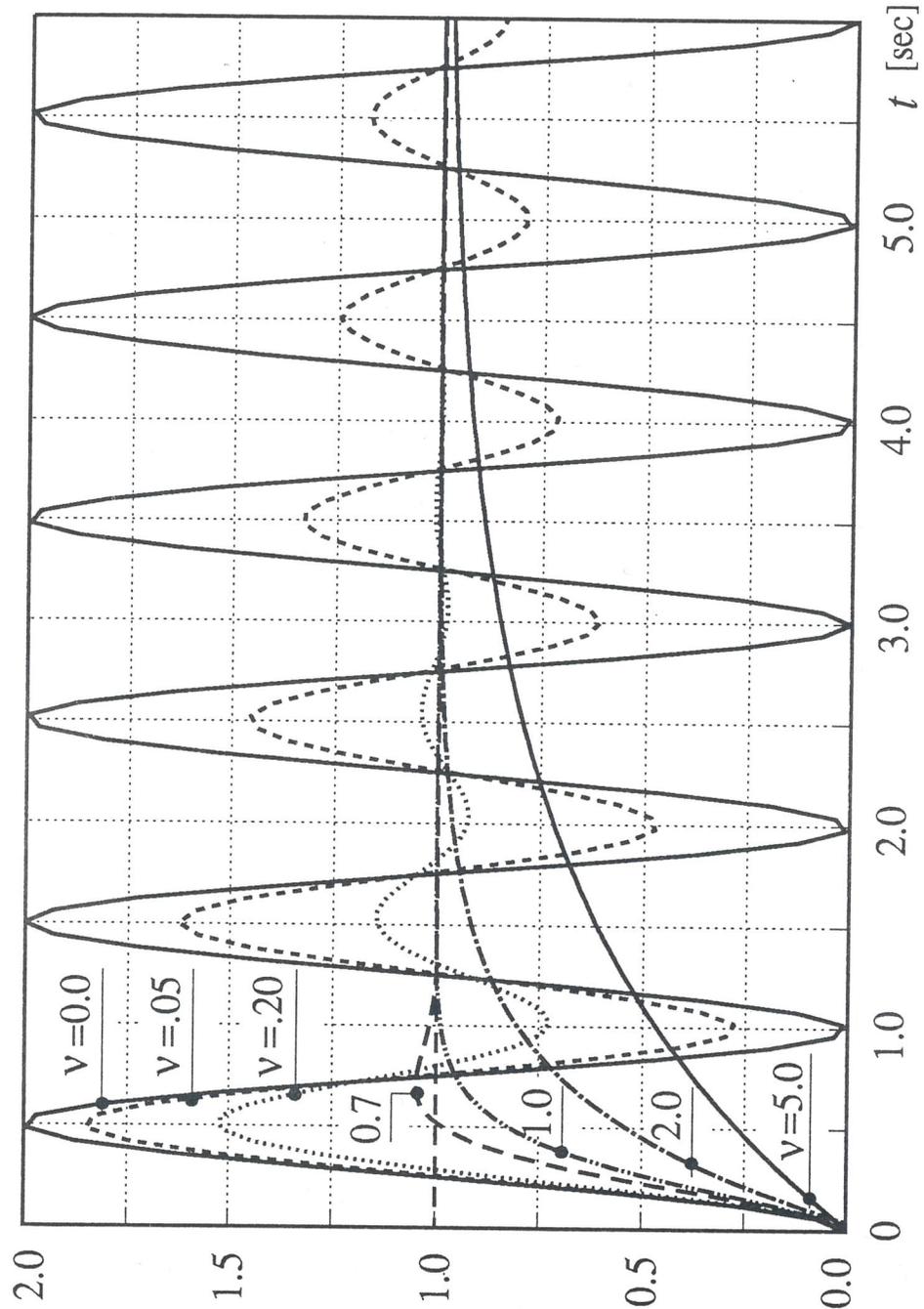


Fig. 27