# La matrice di un'applicazione lineare

**Teorema** Siano $V$ e $W$ $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare. Siano $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ una base per $V$ e $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_m)$ una base per $W$. Allora esiste un'unica matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ t.c. le componenti rispetto alla base $\mathcal{W}$ di $f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n) \in W$ siano $AX$, dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

In altri termini, $f$ è rappresentata dalla matrice $A$. Si pone

$$M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f) \overset{\text{def}}{=} A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

e la si chiama <u>matrice di $f$ rispetto alle basi $\mathcal{V}$ di $V$ e $\mathcal{W}$ di $W$.</u>

Se $V = W$ e $\mathcal{W} = \mathcal{V}$ si pone

$$M_{\mathcal{V}}(f) \overset{\text{def}}{=} M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f).$$

**Dim** <u>Esistenza</u>.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \quad a_{ij} \in \mathbb{K}, \; i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n.$$

$$\rightsquigarrow A := (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K}).$$

$$f\left(\sum_{j=1}^{n} x_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\, f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j\right) w_i$$

Posto $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$, $i=1,\dots,m$, e posto $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

si ha

$$Y = A\,X = L_A(X)$$

dove $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

**OSS** Le colonne di $A$ rappresentano, ordinatamente, le componenti dei vettori $f(v_1),\dots, f(v_n)$ nella base $\mathcal{W} = (w_1,\dots, w_m)$ di $W$.

Unicità Supponiamo che $A' = (a'_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ soddisfi la condizione dell'enunciato. Allora

$f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, w_i$ ha componenti $A_{(j)}$ rispetto a $\mathcal{W}$

$v_j$ ha componenti $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = e_j$ nella base $\mathcal{V}$.

j-esimo posto

$$A_{(j)} = A'\, e_j = A'_{(j)} \quad \forall\, j=1,\dots,n$$

$$(A' e_j)_i = \sum_{k=1}^{n} a'_{ik}\, \delta_{kj} = a'_{ij} \implies a'_{ij} = a_{ij} \quad \forall\, i,j$$

$$\implies A' = A.$$

Resta quindi dimostrata l'unicità.

**Def** Siano $V$ e $W$ due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.
Poniamo $\mathrm{Hom}(V,W) \overset{\text{def}}{=} \{ f : V \to W \mid f \text{ lineare} \}$,
l'insieme di tutte le applicazioni lineari $V \to W$.

Date $f, g \in \mathrm{Hom}(V,W)$, definiamo

$$f+g : V \to W$$
$$(f+g)(v) \overset{\text{def}}{=} f(v) + g(v)$$

Mostriamo che $f+g \in \mathrm{Hom}(V,W)$

$$\begin{aligned}(f+g)(v_1+v_2) &= f(v_1+v_2) + g(v_1+v_2) = \\ &= f(v_1) + f(v_2) + g(v_1) + g(v_2) = \\ &= (f+g)(v_1) + (f+g)(v_2) \quad \forall\, v_1, v_2 \in V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f+g)(\lambda v) &= f(\lambda v) + g(\lambda v) = \lambda f(v) + \lambda g(v) \\ &= \lambda\big(f(v) + g(v)\big) = \lambda (f+g)(v)\end{aligned}$$
$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \ \forall v \in V$

Pertanto $f+g$ è lineare se lo sono $f$ e $g$.

Per $\lambda \in \mathbb{K}$ e per $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ definiamo
$\lambda f : V \to W$, $(\lambda f)(v) \overset{\text{def}}{=} \lambda f(v)$.
In modo analogo si mostra che $\lambda f$ è lineare se è lineare $f$.

Inoltre esiste l'applicazione nulla

$$0 : V \to W$$
$$0(v) \overset{def}{=} 0_W \quad \forall v \in V$$

Chiaramente $0$ è lineare, così

$$0 \in Hom(V, W) \neq \emptyset$$

Con queste operazioni $Hom(V, W)$ è un <u>$\mathbb{K}$-spazio vettoriale</u>.

<u>**Teorema**</u> Siano $U, V, W$ $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.

1) Se $f : U \to V$ e $g : V \to W$ sono lineari allora $g \circ f : U \to W$ è lineare
2) $id_V : V \to V$ è lineare
3) Se $f : V \to W$ è lineare e biiettiva allora $f^{-1} : W \to V$ è lineare

<u>**Def**</u> Siano $V$ e $W$ $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.
Un'applicazione lineare e biiettiva

$$f : V \to W$$

è detta <u>isomorfismo</u> di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali.

Se $W = V$, un isomorfismo $f : V \to V$ è detto automorfismo di $V$.

## Dim (del teorema)

1) • $(g \circ f)(v_1 + v_2) = g\left(f(v_1+v_2)\right) = g\left(f(v_1) + f(v_2)\right) =$
$= g\left(f(v_1)\right) + g\left(f(v_2)\right) = (g \circ f)(v_1) + (g \circ f)(v_2)$

• $(g \circ f)(\lambda v) = g\left(f(\lambda v)\right) = g\left(\lambda f(v)\right) = \lambda g\left(f(v)\right) =$
$= \lambda (g \circ f)(v)$

2) ovvia

3) Siano $w, w_1, w_2 \in W \Rightarrow \exists\, v, v_1, v_2 \in V$ t.c.
$w = f(v)$, $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2)$

• $f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}\left(f(v_1) + f(v_2)\right) = f^{-1}\left(f(v_1 + v_2)\right) =$
$= v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2)$

• $f^{-1}(\lambda w) = f^{-1}\left(\lambda f(v)\right) = f^{-1}\left(f(\lambda v)\right) = \lambda v =$
$= \lambda f^{-1}(w)$.

**Teorema** Siano $U, V, W$ $\mathbb{K}$-spazi vettoriali e siano $f: U \to V$ e $g: V \to W$ applicazioni lineari. Consideriamo basi $\mathcal{U} = (u_1, \dots, u_n)$ per $U$, $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_m)$ per $V$ e $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_\ell)$ per $W$.
Allora

$$M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{U}}(g \circ f) = M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(g)\, M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(f).$$

**Dim** Poniamo

$$A := M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{U}}(f) \quad \in M_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$B := M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(g) \quad \in M_{\ell,m}(\mathbb{K})$$

$$C := M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{U}}(g \circ f) \in M_{\ell,n}(\mathbb{K})$$

$$\begin{array}{ccccc}
U & \xrightarrow{f} & V & \xrightarrow{g} & W \\
u & \longmapsto & f(u) & \longmapsto & (g\circ f)(u) \\
X & \underset{L_A}{\longmapsto} & AX & \underset{L_B}{\longmapsto} & BAX \\
\mathcal{U} & & \mathcal{V} & & \mathcal{W}
\end{array}$$

Quindi le componenti di $(g \circ f)(x_1 u_1 + \dots + x_n u_n)$ sono $BAX$ nella base $\mathcal{W}$, $\forall\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$.

Per il teorema di esistenza e unicità della matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi del dominio e codominio si ha che $C = BA$, da cui si ha la tesi.

**OSS** Questo è il motivo principale per cui si definisce il prodotto righe per colonne.

## Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad ,$$

$$L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + y \end{pmatrix}$$

$\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ base canonica di $\mathbb{R}^2$

$$M_{\mathcal{E}}(L_A) = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Siano ora $b_1 = (1, -1)$, $b_2 = (1, 1)$ $\Longrightarrow$
$\mathcal{B} = (b_1, b_2)$ base per $\mathbb{R}^2$ ($b_1$ e $b_2$ non proporzionali $\Longrightarrow$ lin. indip. $\Longrightarrow$ base)

$$L_A(b_1) = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -b_1$$

$$L_A(b_2) = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\, b_2$$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}}(L_A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{(matrice diagonale)}$$