

Geometria 1 per Matematica, Fisica e AIDA

Diario delle lezioni

A. A. 2021-2022

Docente: Prof. Daniele Zuddas

Lezione 1. Vettori geometrici, somma, moltiplicazione scalare.

Lezione 2. Insiemi, relazioni, relazioni d'equivalenza, funzioni, operazioni binarie, cenni sui gruppi.

Lezione 3. Cenni sui campi, numeri complessi, congruenza, \mathbb{Z}_n .

Lezione 4. Algoritmo di Euclide per il massimo comun divisore, \mathbb{Z}_p con p primo.

Lezione 5. Spazi vettoriali numerici: \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , $(\mathbb{Z}_p)^n$, \mathbb{K}^n . Cenni sui sistemi lineari.

Lezione 6. Spazi vettoriali su un campo, combinazioni lineari di insiemi finiti di vettori, dipendenza e indipendenza lineare per insiemi finiti.

Lezione 7. Vettori proporzionali. Sottospazi vettoriali, sottospazio vettoriale generato da un sottoinsieme finito di vettori, spazi vettoriali finitamente generati.

Lezione 8. Basi finite di spazi vettoriali, base canonica di \mathbb{K}^n , unicità delle componenti rispetto a vettori linearmente indipendenti.

Lezione 9. Esistenza delle basi per spazi vettoriali finitamente generati, disuguaglianza tra numero di vettori linearmente indipendenti e numero di generatori.

Lezione 10. Dimensione, caratterizzazione delle basi, completamento della base.

Lezione 11. Combinazioni lineari di famiglie arbitrarie di vettori, spazio dei polinomi reali, dipendenza e indipendenza lineare per famiglie arbitrarie di vettori, sottospazio vettoriale generato da un sottoinsieme arbitrario di vettori, basi, cenni sugli spazi vettoriali di dimensione infinita e loro caratterizzazione, dimensione di un sottospazio vettoriale, iperpiani vettoriali, intersezione di sottospazi vettoriali.

Lezione 12. Somma di sottospazi vettoriali, generatori di un sottospazio vettoriale somma, formula di Grassmann.

Lezione 13. Somma diretta di sottospazi vettoriali (somma diretta interna). Somma diretta di spazi vettoriali (somma diretta esterna), dimensione della somma diretta.

Lezione 14. Matrici, somma e moltiplicazione scalare, spazio vettoriale delle matrici $m \times n$, prodotto righe per colonne. Proprietà distributiva e associativa.

Lezione 15. Matrice trasposta. Applicazioni lineari, applicazione lineare associata ad una matrice, matrice di un'applicazione lineare rispetto a basi del dominio e del codominio.

Lezione 16. Applicazioni lineari e matrici, spazio vettoriale delle applicazioni lineari, isomorfismi, matrice dell'applicazione composta.

Lezione 17. Isomorfismi tra spazi vettoriali, matrice inversa, gruppo degli automorfismi di uno spazio vettoriale. Sistemi lineari, forma matriciale, compatibilità.

Lezione 18. Spazio delle soluzioni di un sistema lineare, sistemi equivalenti, sistemi e matrici a gradini, operazioni elementari sulle righe.

Lezione 19. Metodo di eliminazione di Gauss e sue applicazioni: risoluzione di sistemi lineari, dipendenza e indipendenza lineare. Sistemi lineari omogenei e spazio delle soluzioni, traslazioni in spazi vettoriali, sottospazi affini, giacitura.

Lezione 20. Teorema di struttura per lo spazio delle soluzioni, soluzione generale in forma parametrica. Nucleo e immagine di un'applicazione lineare, rango di un'applicazione lineare, teorema della dimensione, iniettività e nucleo.

Lezione 21. Rango di una matrice, uguaglianza dei ranghi per righe e per colonne, calcolo del rango col metodo di Gauss. Teorema di Rouché-Capelli. Rango di applicazioni composte e di prodotti di matrici. Matrice del cambiamento di base.

Lezione 22. Teorema di determinazione di un'applicazione lineare, caratterizzazione delle applicazioni lineari iniettive e suriettive, matrici invertibili e rango. Classificazione degli spazi vettoriali di dimensione finita e invarianza della dimensione.

Lezione 23. Caratterizzazione degli isomorfismi tra spazi vettoriali della stessa dimensione, basi speciali per applicazioni lineari, calcolo della matrice inversa mediante il metodo di Gauss, matrici triangolari. Gruppo lineare generale, spazio delle applicazioni lineari e isomorfismo con lo spazio delle matrici. Sistemi lineari con matrice invertibile.

Lezione 24. Permutazioni, gruppo simmetrico, cicli e trasposizioni, segno e parità di una permutazione, proprietà moltiplicativa del segno, segno delle trasposizioni. Determinante e formula di Leibniz.

Lezione 25. Determinanti di matrici triangolari, invarianza per trasposizione, permutazione delle righe o delle colonne di una matrice e determinante. Determinante come funzione multilineare alternante.

Lezione 26. Operazioni elementari sulle righe e determinante, dipendenza lineare e determinante. Matrici invertibili come prodotto di matrici elementari, teorema di Binet, determinante della matrice inversa, matrici simili, invarianza del determinante per similitudine. Minori di una matrice, cofattori, sviluppo di Laplace.

Lezione 27. Matrice cofattore, formula per la matrice inversa, teorema di Cramer, rango, teorema di Kronecker. Forme lineari e spazio vettoriale duale, base duale, equazioni di sottospazi affini.

Lezione 28. Diagonalizzazione di endomorfismi, autovalori, autovettori e autospazi, polinomio caratteristico di una matrice, indipendenza lineare di autovettori relativi ad autovalori distinti.

Lezione 29. Zeri di polinomi e loro molteplicità, teorema fondamentale dell'algebra (senza dimostrazione), fattorizzazione di polinomi in fattori di primo grado. Basi diagonalizzanti per endomorfismi, invarianza del polinomio caratteristico per similitudine, polinomio

caratteristico di un endomorfismo, molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori, teorema delle molteplicità, somma diretta di autospazi, teorema di diagonalizzazione, diagonalizzabilità nel caso complesso.

Lezione 30. Conseguenze del teorema di diagonalizzazione, esempi. Forme bilineari, matrice di una forma bilineare rispetto ad una base.

Lezione 31. Matrici congruenti, cambiamento di base per forme bilineari, forme bilineari simmetriche e matrici simmetriche, forme bilineari su spazi vettoriali numerici e forma bilineare canonica. Prodotti scalari, spazi vettoriali Euclidei, prodotto scalare canonico su \mathbb{R}^n . Vettori e sottospazi vettoriali ortogonali, ortogonale di un sottoinsieme e di un sottospazio vettoriale (complemento ortogonale), somma diretta ortogonale. Rango del prodotto scalare.

Lezione 32. Dimensione del complemento ortogonale, prodotto scalare indotto su un sottospazio vettoriale, norma di un vettore, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, distanza Euclidea, disuguaglianza triangolare, angolo tra due vettori. Sistemi di vettori ortogonali e ortonormali, indipendenza lineare, ortogonalizzazione di Gram-Schmidt, esistenza di basi ortonormali (solo in dimensione finita).

Lezione 33. Completamento della base ortonormale, formula del prodotto scalare e della norma rispetto ad una base ortonormale. Matrici ortogonali, isometrie lineari di spazi vettoriali Euclidei.

Lezione 34. Caratterizzazione delle isometrie lineari mediante basi ortonormali, cambiamento di base ortonormale, proiezione ortogonale. Forme sesquilineari, forme Hermitiane, spazi vettoriali Hermitiani, matrici Hermitiane, disuguaglianza di Cauchy-Schwarz complessa. Autovalori di matrici Hermitiane e di matrici simmetriche reali. Endomorfismi autoaggiunti.

Lezione 35. Matrici di endomorfismi autoaggiunti. Teoremi spettrali per endomorfismi autoaggiunti Euclidei e Hermitiani. Matrici unitarie, automorfismi unitari, teorema spettrale unitario.

Lezione 36. Ortogonalità degli autospazi di endomorfismi autoaggiunti. Decomposizione ai valori singolari (SVD). Cenni sul prodotto vettoriale.