12 Novembre

Formula di Lagrange

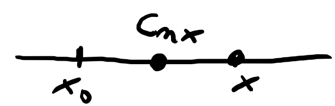
<u>Teor</u> Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$, f differenziabile in (a,b) fino all'ordine $n+1$. Consideriamo il polinomio di Taylor $P_n(x)$ di ordine n di f rispetto a x_0. Allora risulta

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x) \qquad \forall\, x\in(a,b)$$

dove $R_n(x_0)=0$ e dove per $x\neq x_0$ si ha

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

dove c_{nx} è nell'intervallo aperto di estremi x_0 e x



$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

<u>Dim</u>

$R_n(x) \doteq f(x) - P_n(x)$ e osserviamo che R_n ammette derivate fino all'ordine $n+1$ in (a,b) ed in particolare per $k=0,..,n$

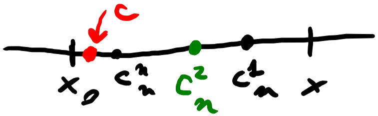
$$R_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - P_n^{(k)}(x_0) = 0 \text{ per ogni } k=0,\dots,n.$$

$$\boxed{\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - \underbrace{R_n(x_0)}_{0}}{(x-x_0)^{n+1} - \underbrace{(x-x_0)^{n+1}|_{x=x_0}}_{0}} = \frac{R_n'(c_n^1)}{(n+1)(c_n^1-x_0)^n}}$$

$x_0 \quad c_n^1 \quad x$

$R_0(x) = (x-x_0) \quad R_0'(c_n^1)$
$= (x-x_0) f'(c_n^1)$

$R_0(x) = f(x) - P_0(x)$
$R_0'(c_n^1) = f'(c_n^1)$



$$\boxed{\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}} = \frac{R'_n(c_n^1)}{(n+1)\,(c_n^1-x_0)^n}$$

$$= \frac{1}{n+1}\,\frac{R''(c_n^2)}{n\,(c_n^1-x_0)^{n-1}} = \dots = \frac{R^{(n)}(c_n^n)}{(n+1)!\,(c_n^n-x_0)} =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!}\,\frac{R_n^{(n)}(c_n^n) - \overbrace{R_n^{(n)}(x_0)}^{0}}{c_n^n - x_0} = \frac{1}{(n+1)!}\,R_n^{(n+1)}(c) = \frac{1}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(c)$$

con $x_0 < c < c_n^n < c_n^{n-1} < \dots < c_n^1 < x$

$$R_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) - P_n^{(n)}(x_0) = 0, \quad R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \overset{0}{\cancel{P_n^{(n+1)}(x)}} = f^{(n+1)}(x)$$

$x_0 < c < x$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

concludiamo che se $x_0 < x$ $\exists$ $x_0 < c < x$ t.c.

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}$$

$c = c_{n x}$

Esempio Supponiamo che e è un numero irrazionale. Approssimarlo con un numero razionale facendo un errore $< 10^{-3}$.

Consideriamo i polinomi di McLaurin di e^x

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

$$\boxed{e^x = P_n(x) + R_n(x)}$$ dove

$$R_n(x) = \frac{(e^x)^{(n+1)}(c_{nx})}{(n+1)!}\, x^{n+1} = \frac{e^{c_{nx}}}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

c_{nx} tra x e 0 $\qquad x = 1$

$$e = P_n(1) + R_n(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + R_n(1)$$

$\uparrow \mathbb{Q}$

$$R_n(1) = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} \qquad 0 < c_n < 1 \qquad P_n(1) \in \mathbb{Q}$$

Quindi la nostra strategia consisterà nell'approssimare e con $P_n(1)$ e nel cercare di prendere n in modo tale che $|R_n(1)| < 10^{-3}$.

$$0 < R_n(1) = \frac{e^{c_n}}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

e poi cerchiamo un n non troppo grande tale che $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-3}$

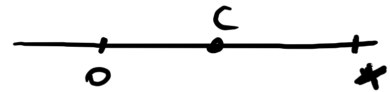
$$\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{1000} \iff (n+1)! > 3000$$

n	$(n+1)!$
1	2
2	6
3	24
4	120
5	720
6	$\boxed{5040}$

$$\left| P_6(1) - e \right| < \frac{1}{1000}$$

Es I polinomi di McLaurin di $\sin(x)$ sono

$$P_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$



$$\sin(x) = P_{2n+1}(x) + R_{2n+1}(x)$$

$$0 < x$$

$$R_{2n+1}(x) = \frac{\sin^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$|R_{2n+1}(x)| = \frac{|\sin^{(2n+2)}(c)|}{(2n+2)!} x^{2n+2} = \frac{|\sin(c)|}{(2n+2)!} x^{2n+2}$$

$$\leq \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

o piccolo

Date due funzioni $f, g : X \to \mathbb{R}$ e dato $x_0 \in X'$

con $g(x) \neq 0$ in $X \setminus \{x_0\}$, scriviamo che $f(x) = o(g(x))$

se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

In particolare se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ scriviamo $f(x) = o(1)$

Se $x_0 \in \mathbb{R}$, e $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n} = 0$ scriviamo

$$f(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$$

Esempio Noi sappiamo che $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{th}(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} =$

$$\operatorname{th}(x) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \qquad = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{e^{x}} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

$$\iff \lim_{x\to+\infty} (1-\operatorname{th}x) = 0 \iff 1-\operatorname{th}(x) = o(1) \quad \text{a } +\infty.$$

Risulta infatti $1-\operatorname{th}(x) = o(x^{-n}) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$$1-\operatorname{th}(x) = 1 - \frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{\cancel{e^{x}}+e^{-x}-(\cancel{e^{x}}-e^{-x})}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} = \frac{2e^{-x}}{e^{x}(1+e^{-2x})}$$

$$1-\operatorname{th}(x) = 2e^{-2x}\,\frac{1}{1+e^{-2x}} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1-\operatorname{th}(x)}{x^{-n}} = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x}}{x^{-n}}\,\frac{1}{1+e^{-2x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\mathrm{th}(x)}{x^{-n}} = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-2x}}{x^{-n}} \, \frac{1}{1+e^{-2x}} =$$

$$= 2 \lim_{x\to+\infty} \underbrace{\frac{x^{n}}{e^{2x}}}_{\to\, 0} \; \underbrace{\frac{1}{1+e^{-2x}}}_{\xrightarrow{x\to+\infty} 1} = 0$$

così $\quad 1-\mathrm{th}(x) = o(x^{-n})$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-2x}} = 1 \iff \frac{1}{1+e^{-2x}} = 1 + o(1)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+e^{-2x}\right) = 1 \qquad\qquad 1+e^{-2x} = 1+o(1)$$

Vale la formula $\dfrac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1)$

$f \in C^0(a,b)$

Teor (Peano) Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ e siano definite $f^{(0)}(x_0), \dots, f^{(n)}(x_0)$. Sia $p_n(x)$ polinomio di Taylor in x_0. Allora

$$f(x) = p_n(x) + R_n(x)$$

con $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right) \left(\iff \lim_{x \to x_0} \dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \right)$

Osservazione Vediamo il caso $n = 0$. $p_0(x) = f(x_0)$

$R_0(x) = f(x) - f(x_0)$ $\qquad \lim_{x \to x_0} R_0(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

<u>Lemma</u> Sia $p(x)$ un polinomio di grado $\leq n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $p(x) = o((x-x_0)^n)$.

Allora $p(x) \equiv 0$.