

# RINORMALIZZAZIONE delle teorie di gauge non-abeliane

Consideriamo la lagrangiana BARE (in gauge di Lorentz) per qualche gruppo di Lie  $G$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{1}{2} \int^{abc} A_\mu^a A_\nu^b (\partial^\mu A^{c\nu} - \partial^\nu A^{c\mu}) \\ & - \frac{1}{4} \int^{bce} \int^{dea} A_\mu^b A_\nu^c A^{d\mu} A^{e\nu} + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{\mu a})^2 \\ & - \bar{c}^a \partial^2 c^a - g \bar{c}^a \partial^\mu \int^{abc} A_\mu^b c^c \\ & + i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - g \bar{\Psi} \gamma^\mu t_R^a \Psi A_\mu^a \end{aligned}$$

← campo fermionico in rep.  $R$  di  $G$

## Grado di divergenza

- $\mathcal{L}$  contiene termini di mass-dim  $\leq 4 \rightarrow$  e' asintoticamente sicuro in un numero finito di loop
- Abbiamo diversi tipi di VERTICI delle forme

$$(u, n, k) \quad \text{con} \quad \begin{cases} u & \text{linee fermioniche} \\ n & \text{bosoni di gauge} \\ k & \text{ghost} \end{cases}$$

$$V_{(u,n,k)} = \# \text{ vertici del tipo } (u, n, k)$$

- Ricordiamo le seguenti relazioni:

$$2 \sum V_{(2,1,0)} = E_f + 2 I_f$$

$E_f = \#$  linee est. del comp  $\mathcal{L}$

$I_f = \#$  linee interne del comp  $\mathcal{L}$

$$V_{(2,1,1,0)} + 3 V_{(0,3,0)} + 4 V_{(0,1,4,0)} + V_{(0,1,1,2)} = E_A + 2I_A$$


$$2 V_{(0,1,1,2)} = E_C + 2I_C$$



$$2I_f = 2V_{(2,1,1,0)} - E_f$$

$$2I_b \equiv 2I_A + 2I_C = V_{(2,1,1,0)} + 3 V_{(0,3,0)} + 4 V_{(0,1,4,0)} + 3 V_{(0,1,1,2)} - \underbrace{E_A - E_C}_{\equiv -E_b}$$

- Il numero dei loop è

$$L = \underbrace{I_f + I_b}_{\text{momenti interni}} - \underbrace{V_{(2,1,1,0)} - V_{(0,3,0)} - V_{(0,1,4,0)} - V_{(0,1,1,2)} + 1}_{\text{- \# funt. } \int}$$

$$\int \frac{\prod_i d^d q_i}{\prod \text{propagators}} \quad (p \text{ nei vertici})$$

Il grado di divergenza è dato da

$$D = \underbrace{dL}_{\text{misura di integrali}} - \underbrace{2I_b - I_f}_{\text{propagatori}} + \underbrace{V_{(0,1,1,2)} + V_{(0,3,0)}}_{p \text{ nei vertici}}$$

$$D = d ( I_f + I_b - V_{(2,1,1,0)} - V_{(0,3,0)} - V_{(0,1,1,2)} + 1 ) - 2I_b - I_f + V_{(0,1,1,2)} + V_{(0,3,0)}$$

$$= \underbrace{I_f (d-1)} + \underbrace{I_b (d-2)} - d V_{(2,1,1,0)} - (d-1) V_{(0,3,0)} - d V_{(0,1,4,0)} - (d-1) V_{(0,1,1,2)} + d$$

$$= (d-1) \left( V_{(2,1,1,0)} - \frac{E_f}{2} \right) + \frac{(d-2)}{2} \left( V_{(2,1,1,0)} + 3V_{(0,1,3,0)} + 4V_{(0,1,4,0)} + 3V_{(0,1,1,2)} - E_b \right) - \dots$$

$$= d - \frac{d-1}{2} E_f - \frac{d-2}{2} E_b + V_{(2,1,1,0)} \left( \overbrace{d-1 + \frac{d-2}{2} - d}^{\frac{d-4}{2}} \right) + V_{(0,1,3,0)} \left( \overbrace{\frac{3}{2}(d-2) - d + 1}^{\frac{d-4}{2}} \right) + V_{(0,1,4,0)} \left( \overbrace{2d - 4 - d}^{\frac{d-4}{2}} \right) + V_{(0,1,1,2)} \left( \overbrace{1 - d + \frac{3}{2}(d-2)}^{\frac{d-4}{2}} \right)$$

$$= d - \frac{d-1}{2} E_f - \frac{d-2}{2} E_b + \frac{d-4}{2} \left[ V_{(2,1,1,0)} + V_{(0,1,3,0)} + 2V_{(0,1,4,0)} + V_{(0,1,1,2)} \right]$$

La dipendenza di  $D$  dal # di vertici si annulla per  $d=4$  ( $\leftrightarrow$  operatori in  $L$  sono mass-dim = 4)

In  $d=4$

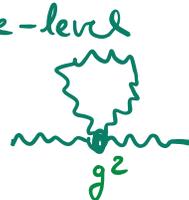
$$D = 4 - \frac{3}{2} E_f - E_b$$

$\rightarrow$  c'è un numero finito di supertra 1PI che sono potenzialmente divergenti.

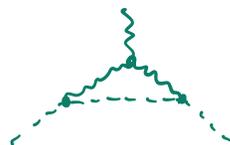
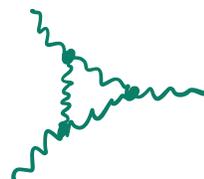
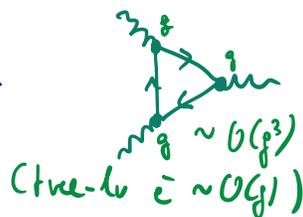
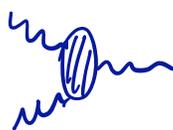
Andiamo a vedere quali sono tali 1PI comp. divergenti. (Anche se sono Opt e 1pt)

All'ordine  $g^2$  risulta a tre-level

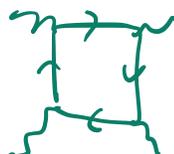
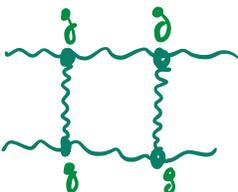
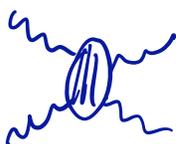
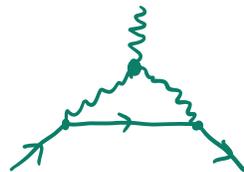
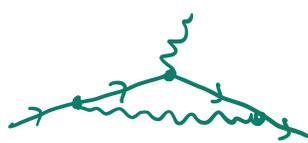
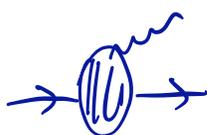
$D=2$



$D=1$

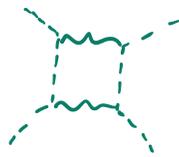
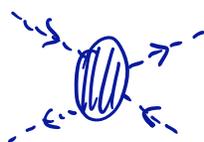


$D=0$



$\sim O(g^4)$  (tree-level  $\bar{c} \sim O(g^2)$ )

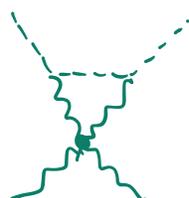
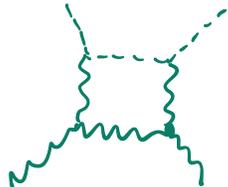
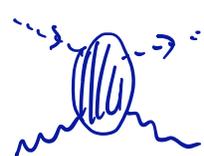
(\*)



?

Non ci sono termini in  $L$  del tipo

$(\bar{c}c)^2$



?

$\bar{c}cAA$

(\*) sono sperimentalmente divergenti.

l'id di Ward relativa alla simmetria  $(\bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma)$  <sup>cont.</sup> permette di capire che il vero grado di div. è  $< 0$ .

Antighost TRANSLATION invariance:

$$L_{gh} = \partial^\mu \bar{c} D_\mu c \quad \text{inv. sotto } \bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma \quad \gamma \text{ cont.}$$

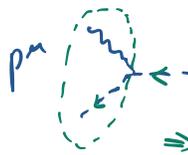
$$\int Dc D\bar{c} e^{i \int L_{gh}} \bar{c}(y) = \int Dc D\bar{c} e^{i \int L_{gh} + i \int \partial^\mu \gamma(x) D_\mu c} (\bar{c}(y) + \gamma(y))$$

↑  
cambio coord. usando  
 $\bar{c} \mapsto \bar{c} + \gamma(x)$

$$= \int Dc D\bar{c} e^{i \int L_{gh}} \bar{c}(y) + \int \gamma(x) \langle (i) \partial^\mu D_\mu c(x) \bar{c}(y) \rangle d^4x + \int \gamma(x) \delta(x-y) d^4x$$

$$\Rightarrow \partial^\mu_x \langle i D_\mu c(x) \bar{c}(y) \rangle = \delta(x-y)$$

CORRENTE DELL'ANTI-GH TRANSL.

$p^\mu$   ← = costante fissata  →  
 $\Rightarrow$  per ogni linea di  $\bar{c}$  tolgo un grado di div.

$\Rightarrow$    $D=1 \rightarrow D=0$  ancora div.

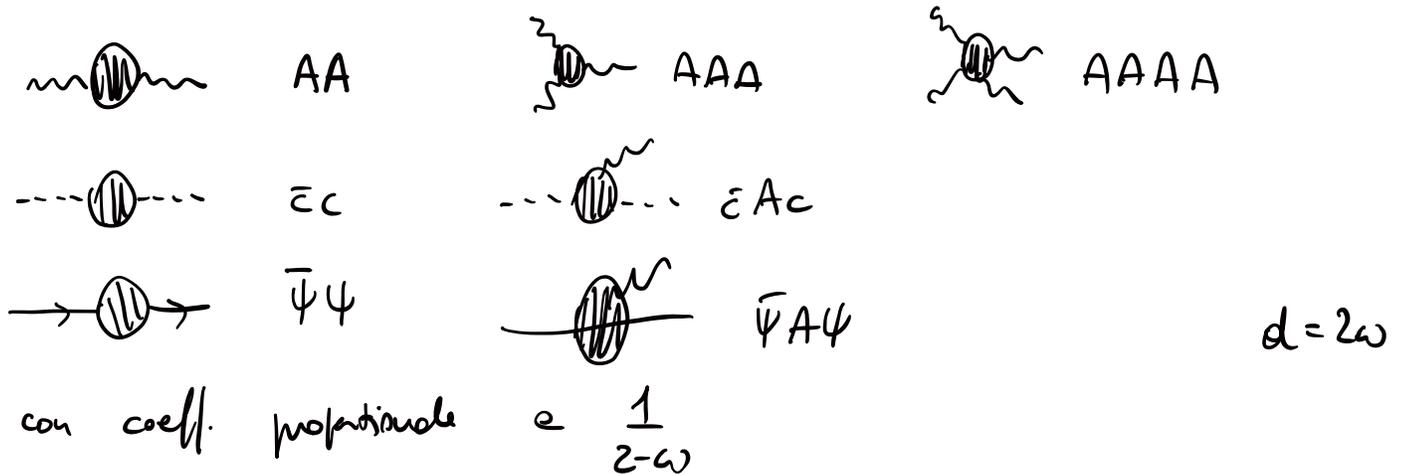
  $D=0 \rightarrow D=-1$   
  $D=0 \rightarrow D=-2$  } Convergenti

Qta simm  $\bar{c}$  presente in  $G(A) = \partial^\mu A_\mu$ .

Per altre scelte di  $G(A)$ , non ha bisogno di fermioni

$\sim c^4$  in poter rimuovere la fonte.

Per cancellare infiniti nelle 1PI, uno aggiunge dei controtermini:



Purtroppo, aggiungere tali termini NON corrisponde a farci a una ridefinizione dei PARAMETRI nella Lagrangiana BARE.

→ i termini in  $L$  appaiono con coeff. LEGATI TRA LORO dalla simmetria di BRST

$$L_B = \text{termini cinematici quadratici} + g A A \partial A + g^2 A A A A + g \bar{c} A c + g \bar{\psi} A \psi$$

$\nwarrow$   
 $Z$ 's

Affinché la teoria sia rinormalizzabile, cioè è finita con una opportuna scelta dei parametri (come funt. di  $w$ ), bisogna che gli infiniti siano pure legati da relazioni dettate da BRST sym.

Se esprimiamo i controtermini a  $\mathcal{L}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{Z_A}{4} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)^2 + \frac{Z_V^{(0,3,0)}}{2} g_r \int^{abc} A_\mu^a A_\nu^b (\partial^\mu A^{c\nu} - \partial^\nu A^{c\mu}) \\ & - \frac{Z_V^{(0,4,0)}}{4} g_r^2 \int^{bca} \int^{dea} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e} + \frac{Z_\xi}{2\xi} (\partial_\mu A^{\mu a})^2 \quad (*) \\ & - Z_c \bar{c}^a \partial^2 c^a - Z_V^{(0,1,2)} g_r \bar{c}^a \partial^\mu \int^{abc} A_\mu^b c^c + Z_\psi i \bar{\Psi} \not{\partial} \Psi - Z_m m_r \bar{\Psi} \Psi \\ & - Z_V^{(2,1,0)} g_r \bar{\Psi} \gamma^\mu t_R^a \Psi A_\mu^a \end{aligned}$$

(i campi sono i campi RINORMALIZZATI  $\Phi_B = \Phi_r Z_\Phi^{1/2}$ )

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\Phi_r, g_r, m_r) + \mathcal{L}_{c.t.}$$

Se uno usa un REGOLARIZZAZIONE BRST-INVARI. allora

le identità di Ward valgono ancora ( $\mathcal{L}^{reg}$  è ancora inv. sotto BRST)

↳ relazioni tra i correlatori che ci si può ricavare usando le transf. di BRST nel P.I.

Applicando le id. di WARD-TAKAHASHI (SLAVNOV-TAYLOR)

in la simmetria di BRST, ci si ricava

$$\frac{Z_V^{(0,4,0)}}{Z_V^{(0,3,0)}} = \frac{Z_V^{(0,3,0)}}{Z_A} = \frac{Z_V^{(0,1,2)}}{Z_c} = \frac{Z_V^{(2,1,0)}}{Z_\psi}$$

Prendiamo transf. BRST ( $\delta\phi = \epsilon Q_B \cdot \phi$ )

$$Q_B \cdot A_\mu^a = \partial_\mu c^a + a \int^{abc} A_\mu^b c^c$$

$$Q_B \cdot c^a = -\frac{b}{2} \int^{abc} c^b c^c$$

$$Q_B \bar{c}^a = \gamma \partial^\mu A_\mu^a$$

$$Q_B^2 = 0 \Rightarrow b = a = \gamma$$

$Q_B \Psi = \text{tric} \Psi$

Imponendo l'inv. sotto BRST della Lagrangiana  $\mathcal{L}$  (\*)

$$a Z_A = g_r Z_V^{(0,1,3,0)} \quad a Z_V^{(0,1,1,0)} = g_r Z_V^{(0,1,4,0)}$$

$$a Z_C = g_r Z_V^{(0,1,1,2)} \quad a Z_\psi = g_r Z_V^{(2,1,1,0)}$$



$$Z_V^{(2,1,1,0)} \mu^{2\omega} g_r \bar{\psi} \gamma^\mu t_R^a \psi A_\mu^a = g_B \bar{\psi}_B \gamma^\mu t_R^a \psi_B A_{B\mu}^a$$

$$= g_B Z_\psi Z_A^{1/2} \bar{\psi} \gamma^\mu t_R^a \psi A_\mu^a$$

$$\Rightarrow g_B = g_r \mu^{2\omega} Z_V^{(2,1,1,0)} Z_\psi^{-1} Z_A^{-1/2} \quad (*) \quad (d=2\omega)$$

Potremmo calcolarci  $g_B$  utilizzando un'altra fermione di interazione in  $\mathcal{L}$ , per esempio  $g A A \partial A$ :

$$Z_V^{(0,1,3,0)} \frac{1}{2} \mu^{2\omega} A A \partial A = \frac{g_B}{2} A_B A_B \partial A_B$$

$$\Rightarrow g_B = g_r \mu^{2\omega} \frac{Z_V^{(0,1,3,0)}}{Z_A^{3/2}} = g_r \mu^{2\omega} \frac{Z_V^{(0,1,3,0)} Z_A^{-1/2}}{Z_A}$$

$$= \underbrace{Z_V^{(2,1,1,0)}}_{\text{from (*)}} Z_\psi^{-1}$$

Detto altrimenti, ci basta def.  $g_B$  come in (\*)

per cancellare gli infiniti anche in  $\mathcal{D}_n$  (e  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ )

$$\frac{1}{2} g_B A_B^2 \partial A_B = \frac{1}{2} \mu^{2\omega} g_r Z_V^{(2,1,1,0)} Z_\psi^{-1} Z_A^{-1/2} Z_A^{3/2} A^2 \partial A =$$

$$\nearrow = \frac{1}{2} \mu^{2\omega} g_r Z_A^{(0,1,3,0)} A^2 \partial A$$

Id. Slavnov-Taylor

questo è la costante di normalizzazione riducendosi la cancellat. d'is in  $\mathcal{D}_n$ .