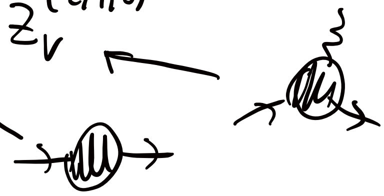
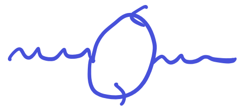
β-function

$$g_B = g_r\, \mu^{2-\omega}\, Z_A^{-1/2}\, Z_\psi^{-1}\, Z_V^{(2,1,0)}$$

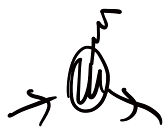


cost. necessaria per cancellare l'∞ in 

Per trovare la relaz. tra g_B e g_r dobbiamo calcolare 3 ampiezze 1PI (In QED, grazie a id. Ward, $Z_V^{(2,1)} = Z_\psi$ ⇒ bastava calcolare , che a 1 loop è )

$Z_A \longleftrightarrow$  (4 diagr. a 1-loop)

$Z_\psi \longleftrightarrow$  (1 diagr. a 1-loop)

$Z_V^{(2,1,0)} \longleftrightarrow$  (2 diagr. a 1-loop)

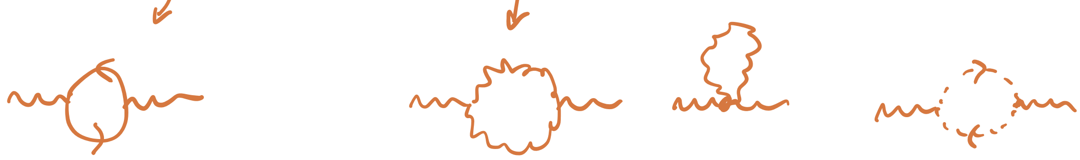
n° di FLAVOURS

Prendiamo una teoria con N_f fermioni di Dirac nella rapp. R di G $\left(i\bar\psi^I \not{D} \psi^I = i \bar\psi^I (\not\partial + i A^a_\mu \gamma^\mu t^a_R)\psi^I \right)$

simmetria globale ("di flavor") è $SU(N_f)$

$$Z = 1 + \delta Z$$

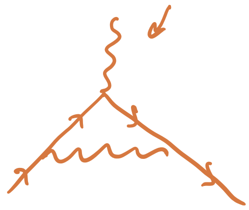
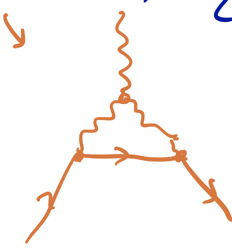
$$\delta Z_A = -\frac{g_r^2}{16\pi^2}\left(\frac{4}{3} N_f\, c(R) - \frac{5}{3} c_2(G)\right)\frac{1}{2-\omega}$$



$$\delta Z_\psi = -\frac{g_r^2}{16\pi^2}\, C_2(R)\, \frac{1}{2-\omega} \rightarrow$$ 

questo termine fa sì che $\delta Z_V^{(2|1|0)} \neq \delta Z_\psi$ contrariam. alla QED

$$\delta Z_V^{(2|1|0)} = -\frac{g_r^2}{16\pi^2}\left(C_2(R) + C_2(G) \right)\frac{1}{2-\omega}$$

$$g_B = g_r \mu^{2-\omega} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\delta Z_A\right)}_{\cong Z_A^{-1/2}} \underbrace{\left(1 - \delta Z_\psi\right)}_{\cong Z_\psi^{-1}} \underbrace{\left(1 + \delta Z_V^{(2|1|0)}\right)}_{Z_V^{(2|1|0)}}$$

conto perturbativo

$$= g_r \mu^{2-\omega}\left(1 - \frac{g_r^2}{16\pi^2}\left\{ -\frac{2}{3}N_f\, C(R) + \frac{5}{6}C_2(G) - \cancel{C_2(R)} + \cancel{C_2(R)} + C_2(G)\right\}\frac{1}{2-\omega}\right)$$

$$= g_r \mu^{2-\omega}\left(1 - \frac{g_r}{16\pi^2}\underbrace{\left\{ \frac{11}{6}C_2(G) - \frac{2}{3}N_f\, C(R)\right\}}_{\equiv \Delta}\frac{1}{2-\omega}\right)$$

$$\epsilon \equiv 2-\omega$$

non dip. da μ

$$g_B = g_r(\mu)\, \mu^{\epsilon}\left(1 - \frac{g_r(\mu)^2}{16\pi^2}\frac{\Delta}{\epsilon}\right) \qquad (0)$$

Vogliamo usare questa relazione per calcolare la dipendenza di g_r da μ. Si sceglie μ della scala a cui si vuole fare conto (o esperimento) affinché i $\log(P^2/\mu^2)$ siano $\mathcal{O}(1)$; $g_r(\mu)$ corrispondente mi dirà se siamo in regime perturbativo o no (cioè $g_r(\mu) \ll 1$ o $\gg 1$?)

Prendiamo $\mu \frac{d}{d\mu}(0)$

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} g_r \cancel{\mu^\epsilon} \left(1 - \frac{g_r^2}{16\pi^2}\frac{\Delta}{\epsilon}\right) + \epsilon g_r \cancel{\mu^\epsilon}\left(1 - \frac{g_r^2}{16\pi^2}\frac{\Delta}{\epsilon}\right)$$
$$- g_r \cancel{\mu^\epsilon} \frac{g_r}{8\pi^2}\frac{\Delta}{\epsilon}\mu\frac{dg_r}{d\mu} \quad + \text{higher order in } g_r$$

g_r e $\mu\frac{dg_r}{d\mu}$ sono finiti per $\epsilon \to 0$

$$= \epsilon g_r + \underline{\mu\frac{dg_r}{d\mu}} - \frac{g_r^3}{16\pi^2}\Delta - \frac{3 g_r^2}{16\pi^2}\frac{\Delta}{\epsilon}\underline{\mu\frac{dg_r}{d\mu}} + \dots$$

A ordine zero otteniamo $\mu\frac{dg_r}{d\mu} = -\epsilon g_r + \underbrace{\beta(g_r)}_{\text{subleading}}$

$\left(\epsilon \to \mu\frac{dg_r}{d\mu} \text{ per } \epsilon \to 0\right)$

$$\Rightarrow \quad 0 = \cancel{\epsilon g_r} - \cancel{\epsilon g_r} + \beta(g_r) - \frac{g_r^3}{16\pi^2}\Delta + \frac{3g_r^3}{16\pi^2}\Delta \quad + \text{higher order in } g_r$$

$$\Rightarrow \quad \beta(g_r) = -\frac{2g_r^3\Delta}{16\pi^2} = -\frac{g_r^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}c_2(G) - \frac{4}{3}N_f\, c(R)\right)$$

(#)

Prendiamo $G = SU(N)$ e $R = N$ $\Rightarrow \begin{cases} c_2(G) = N \\ c(R) = 1/2 \end{cases}$

$$\beta = -\frac{g_r^3}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}N_f\right)$$

Per QCD $\quad N = 3 \quad N_f = 6 \quad (u, d, s, c, t, b)$

$$\beta_{QCD} = -\frac{7}{16\pi^2}g_r^3 < 0 \quad \Rightarrow \text{ASINTOTICAM. LIBERA in UV}$$

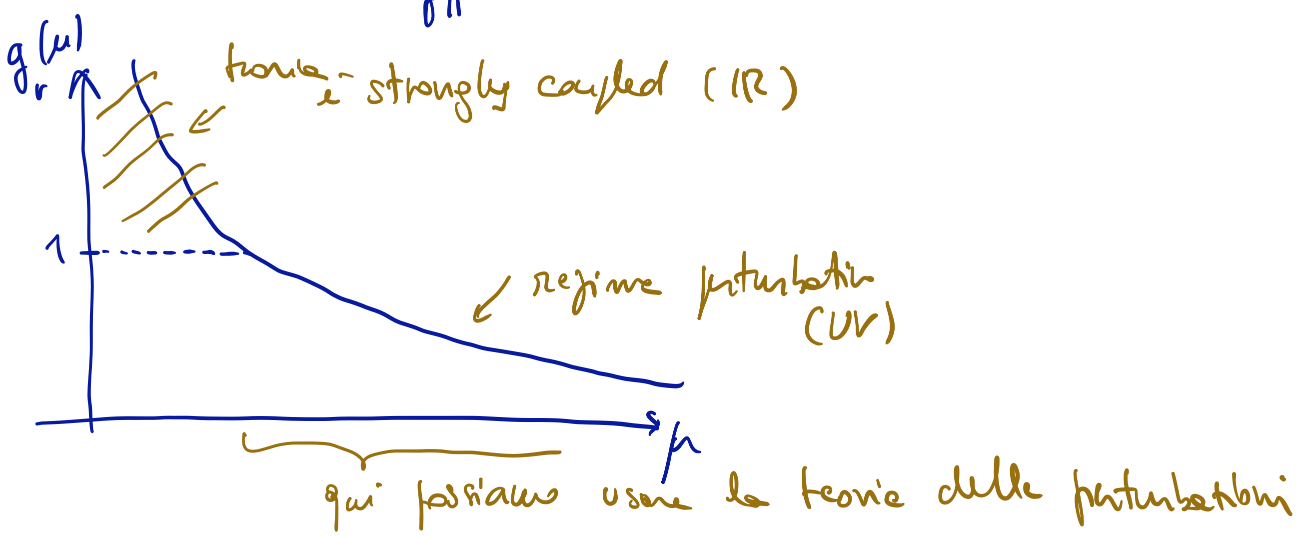
Per YM $\quad N_f = 0$

$$\beta_{YM} = -\frac{11}{48} C_2(G)\, g_r^3 < 0 \Rightarrow$$ ASINTOTICAM. LIBERA in UV

(QED ha $\beta_{QED} > 0 \Rightarrow$ AS. LIB. in IR)

Ricordiamo che la relazione (#) può essere integrata (*)

$$g_r^2(\mu) = \frac{g_r^2(\mu_0)}{1 + \frac{g_r^2(\mu_0)}{8\pi^2}\left(\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} N_f C(R)\right) \ln \mu/\mu_0}$$



(*) Si può integrare $\beta(g) = \mu \frac{dg}{d\mu}$:

$$\int_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} \frac{dg}{\beta(g)} = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} = \ln(\mu/\mu_0)$$

In regime perturbativo $\beta(g) = \beta_0 g^3$ $\qquad \beta_0 = -\frac{1}{16\pi^2}\left(\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} N_f C(R)\right)$ (#)

$$\frac{1}{\beta_0}\int_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} \frac{dg}{g^3} = \frac{1}{\beta_0}\left[-\frac{1}{2g^2}\right]_{g(\mu_0)}^{g(\mu)} = \frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu_0)} - \frac{1}{2\beta_0 g^2(\mu)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{g^2(\mu)} = \frac{1}{g^2(\mu_0)} + \beta_0 \ln\left(\frac{\mu_0^2}{\mu^2}\right)$$

β - FUNCTION e BACKGROUND FIELD METHOD

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{campo di gauge}}}{\mathcal{A}_\mu} = \overset{\text{BKG FIELD}}{A_\mu} + \underset{\text{fluttuazioni}}{a_\mu} \qquad D_\mu = \partial_\mu + i \overset{\text{BKG}}{A_\mu}$$

(che da prima indicavo con A_μ)

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \qquad a_\mu = a_\mu^a T^a$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu + i[\mathcal{A}_\mu, \mathcal{A}_\nu]$$

$$= \overset{\text{BKG}}{F_{\mu\nu}} + \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu + i[A_\mu, a_\nu] + \underset{\substack{\| \\ -i[A_\nu, a_\mu]}}{i[a_\mu, A_\nu]} + i[a_\mu, a_\nu]$$

$$= F_{\mu\nu} + D_\mu a_\nu - D_\nu a_\mu + i[a_\mu, a_\nu]$$

Utilizzeremo il P.I. in formulazione EUCLIDEA $\int \mathcal{D}\varphi\, e^{-S[\varphi]}$

$$S_{YM} = \frac{1}{g^2} \int d^4x \; \mathrm{tr}\Big[\frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + 2F^{\mu\nu} D_\mu a_\nu + D^\mu a^\nu D_\mu a_\nu$$

$$- D^\mu a^\nu D_\nu a_\mu + i F^{\mu\nu}[a_\mu, a_\nu] \Big\} \text{quadratici in } a_\mu$$

$$+ 2i D^\mu a^\nu [a_\mu, a_\nu] - \frac{1}{2}[a^\mu, a^\nu][a_\mu, a_\nu] \Big]$$

Trasf. di gauge: $\delta \mathcal{A}_\mu = \mathcal{D}_\mu \alpha \qquad \mathcal{D}_\mu = D_\mu + i a_\mu = \partial_\mu + i \mathcal{A}_\mu$

c'è un'ambiguità nel dire come trasf. tra A e a; scegliamo

$$\delta A_\mu = 0 \qquad \delta a_\mu = D_\mu \alpha + i[a_\mu, \alpha]$$

GAUGE FIXING : $G(A,a) = D^\mu a_\mu$ ← dipende dalla scelta di campo di Bkg A_μ

Seguendo la procedura di FADDEEV–POPOV, otteniamo un termine di gauge-fixing nell'azione:

$$S_{g.f.} = \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\big[\underbrace{D^\mu a_\mu\big]^2}_{G^a G^a}$$

↑ scelta di ξ fatta per comodità (semplificherà l'azione finale)

In S_{YM} c'è un termine

$$-\frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left[D^\mu a^\nu D_\nu a_\mu\right] \underset{\text{integrando per parti}}{=} \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left[a_\nu D^\mu D^\nu a_\mu\right] =$$

$$\partial^\mu \mathrm{tr}\left[a^\nu D_\nu a_\mu\right] = D^\mu \mathrm{tr}\left[a^\nu D_\nu a_\mu\right] = \mathrm{tr}\left[D^\mu a^\nu D_\nu a_\mu\right] + \mathrm{tr}\left[a^\nu D^\mu D_\nu a_\mu\right]$$

$$= \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\Big[a_\nu\big(\underbrace{[D^\mu, D^\nu]}_{iF^{\mu\nu a} t^a_{Adj}} + D^\nu D^\mu\big) a_\mu\Big] =$$

$$= \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left[i a_\nu [F^{\mu\nu}, a_\mu]\right] \underbrace{- \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\left[(D^\mu a_\mu)^2\right]}_{\text{questo viene cancellato da } S_{g.f.}}$$

$$S_{YM} + S_{g.f.} = \frac{1}{g^2}\int d^4x \, \mathrm{tr}\Big[\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + 2F^{\mu\nu}D_\mu a_\nu + D^\mu a^\nu D_\mu a_\nu$$
$$+ 2i\, a_\nu [F^{\mu\nu}, a_\mu]^{(*)} + 2i\, D^\mu a^\nu [a_\mu, a_\nu] - \frac{1}{2}[a^\mu, a^\nu][a_\mu, a_\nu]\Big]$$

due termini quadratici in a_μ

$(*) \; -2i\, a_\mu [F^{\mu\nu}, a_\nu]$

(*) $\quad tr\left(F^{\mu\nu}[a_\mu, a_\nu]\right) =$

$$= tr\left(F^{\mu\nu} a_\mu a_\nu - F^{\mu\nu} a_\nu a_\mu\right)$$

$$= tr\left(a_\nu F^{\mu\nu} a_\mu - a_\nu a_\mu F^{\mu\nu}\right)$$

usiamo ciclicità della traccia

$$= tr\left(a_\nu [F^{\mu\nu}, a_\mu]\right)$$

$G(A,a) = D^\mu a_\mu$

Nell'integrale sui cammini in FP abbiamo utilizzato

$$1 = \int \mathcal{D}\alpha \; \delta\left(G(A^\alpha, a^\alpha)\right) \det\left(\frac{\delta G(A^\alpha, a^\alpha)}{\delta\alpha}\right)$$

dove $\quad A^\alpha_\mu = A_\mu \qquad a^\alpha_\mu = a_\mu + D_\mu \alpha + i[a_\mu, \alpha]$

Il det di FP sarà riscritto come

$$\det\left(\frac{\delta G(A^\alpha, a^\alpha)}{\delta\alpha}\right) = \int \mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}\; e^{-\frac{1}{g^2}\int d^4x\, tr\left[-\bar{c} D^2 c - i\bar{c} D^\mu [a_\mu, c]\right]}$$

scegliamo qto fattore per convenienza

termine quadratico in $c, \bar{c}, a$

Proseguendo con FP, l'integrale su $\mathcal{D}\alpha$ disaccoppia e rimaniamo con l'integrale sui cammini di e^{-S} dove

$$S = S_{YM} + S_{g.f.} + S_{gh}$$

S è invariante sotto $\quad A_\mu \mapsto U^{-1} A_\mu U - \partial_\mu U U^{-1} \qquad a_\mu \mapsto U^{-1} a_\mu U \quad$ (A)

Integriamo su $a_\mu, c, \bar{c}$

$$e^{-S_{eff.}[A]} \equiv \int \underbrace{\mathcal{D}a\,\mathcal{D}c\,\mathcal{D}\bar{c}}_{\substack{\text{invariante} \\ \text{sotto trasf. } (*)}} \; e^{-S[A,a,c,\bar{c}]}$$

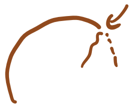
Anche $S_{eff}[A]$ è INVARIANTE sotto $(*)$ (trasf. di gauge del camp. di bkg. A_μ)
($G(A,a)=0$ è inv. sotto trasf. $(*)$)

Scegliamo come camp di bkg A_μ una soluzione delle eq. del moto classiche ($D_\mu F^{\mu\nu}=0$) ⇒ termini lineari in S_{YM} scompaiono (espansione di $S_{YM}(A)$ attorno a soluz. di eq. del moto)

Vogliamo calcolarci $S_{eff.}[A]$; dobbiamo quindi fare il P.I. e lo calcoliamo fermandoci a 1-LOOP. ⇒ possiamo ignorare termini che NON siano quadratici

↓

il P.I. diventa Gaussiano



vertice interazione forzerebbe ad avere diagrammi almeno 2-loop.