TEORIA DELLA MISURA

IDEA: GENERALIZZARE IL CONCETTO DI <u>LUNGHEZZA</u>, <u>AREA</u>, <u>VOLUME</u>, ...

LA PROBABILITÀ È UN CASO PARTICOLARE DI MISURA

$(\Omega, \mathcal{F})$ SPAZIO <u>MISURABILE</u>

Ω → INSIEME

$\mathcal{F}$ → σ-ALGEBRA SU Ω

$(\mathbb{R}, \mathcal{B})$

$(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^{(2)})$

$(\mathbb{R}^3, \mathcal{B}^{(3)})$

...

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^{(n)})$

TEORIA DELLA MISURA

SPAZIO DI MISURA

$$(\Omega, \mathcal{F}, m)$$

m MISURA SU $(\Omega, \mathcal{F})$

SE $m : \mathcal{F} \to [0, \infty]$

(M1) $m(\emptyset) = 0$

(M2) SE $A_1, A_2, A_3, \ldots \in \mathcal{F}$

A DUE A DUE DISGIUNTI,

ALLORA

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

(σ- O NUMERABILE ADDITIVITÀ)

TEORIA DELLA MISURA

m MISURA SU $(\Omega, \mathcal{F})$

* m È UNA PROBABILITÀ
  SE $m(\Omega) = 1$

* m È FINITA SE $m(\Omega) < +\infty$

* m È σ-FINITA SE ESISTONO
  $A_1, A_2, A_3, \_\_\_ \in \mathcal{F}$ TALI CHE
  $$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$$
  $m(A_i) < +\infty$ PER OGNI i

PROPRIETÀ DI UNA MISURA

m MISURA SU $(\Omega, \mathcal{F})$

(i) SE $A, B \in \mathcal{F}$ SONO DISGIUNTI ALLORA

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B)$$

(ii) SE $A_1, A_2, \ldots, A_n$ SONO A DUE A DUE DISGIUNTI, ALLORA

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = m(A_1) + \ldots + m(A_n)$$

<u>FINITA</u> <u>ADDITIVITÀ</u>

(iii) SE $A, B \in \mathcal{F}$, $A \subset B$

$$m(B - A) + m(A) = m(B)$$

E QUINDI $m(A) \leq m(B)$

INOLTRE

$$m(A) + m(A^c) = m(\Omega)$$

PROPRIETÀ DELLA MISURA

(iv) SE $A, B \in \mathcal{F}$, ALLORA

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) =$$
$$= m(A) + m(B)$$

(v) SUBADDITIVITÀ: $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}$

$$m(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq$$
$$\leq m(A_1) + \dots + m(A_n)$$

E QUINDI PER $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$$

PROPRIETÀ DELLA MISURA

(vi) CONTINUITÀ DAL BASSO

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A_n \subset \quad \in \mathcal{F}$

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} m(A_n)$$

(vii) CONTINUITÀ DALL'ALTO

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots \supset A_n \supset \dots \quad \in \mathcal{F}$

$\exists q : m(A_q) < +\infty$

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} m(A_n)$$

TEORIA DELLA MISURA

ESEMPIO: MISURA DI CONTEGGIO

$$\#A = \begin{cases} \text{NUMERO DI ELEMENTI DI } A \text{ QUANDO } A \text{ È FINITO} \\ +\infty \text{ SE } A \text{ È INFINITO} \end{cases}$$

$(\Omega, 2^\Omega)$ SIA $S \subset \Omega$ FISSATO

$\gamma_S(A) = \#(A \cap S)$

= NUMERO DI ELEMENTI DI S IN A

γ_S = MISURA DI CONTEGGIO (INDOTTA DA S)

* $S = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots\}$
  $\gamma_S(A)$ = QUANTI ω_i CI SONO IN A
* $\Omega = \mathbb{N}$, $S = \{\text{NUMERI PRIMI}\}$
* $S = \{\omega\}$
  $\gamma_S = \delta_\omega$ = MISURA DI DIRAC (PROBABILITÀ!)

NOTAZIONE

MISURA DI LEBESGUE IN $\mathbb{R}^n$

$$\Omega = \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ VOLTE}}$$

COME ESTENDERE LA NOZIONE USUALE DI LUNGHEZZA $(n=1)$, AREA $(n=2)$, VOLUME $(n=3)$, ... E A QUALI INSIEMI SI PUÒ ESTENDERE?

SIA I UN (IPER-)RETTANGOLO DI $\mathbb{R}^n$,

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n; b_n]$$

CON $a_i \leq b_i$.

PONIAMO

$$\lambda^{(n)}(I) = (b_1 - a_1) \cdot (b_2 - a_2) \cdot \ldots \cdot (b_n - a_n)$$

MISURA DI LEBESGUE IN $\mathbb{R}^n$

$n=1$: LUNGHEZZA

$$\lambda^{(1)}([a,b]) = b-a$$

$n=2$: AREA

$$\lambda^{(2)}([a,b]\times[c,d]) =$$
$$= (b-a)\cdot(d-c)$$

$n=3$: VOLUME

$$\lambda^{(3)}([a,b]\times[c,d]\times[e,f])$$
$$= (b-a)\cdot(d-c)\cdot(f-e)$$

MISURA DI LEBESGUE IN $\mathbb{R}^n$

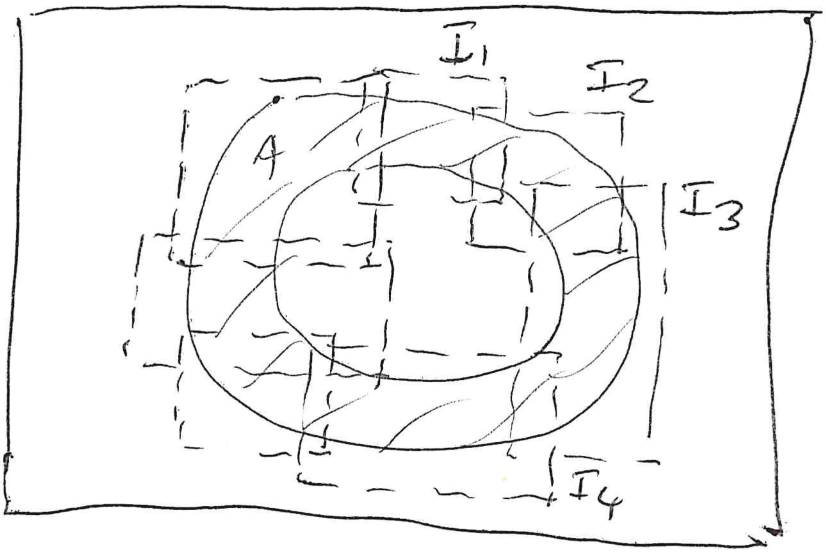
COME ESTENDERE $\lambda^{(n)}$ AD ALTRI INSIEMI?

APPROSSIMAZIONE (DA SOPRA):

PER OGNI $A \subset \mathbb{R}$, LA MISURA ESTERNA DI LEBESGUE DI A È

$$\lambda^{*(n)}(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{(n)}(I_i) \ :\ I_i \text{ RETTANGOLO DI } \mathbb{R}^n,\ A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}$$

I RETTANGOLI I_i "RICOPRONO" L'INSIEME A

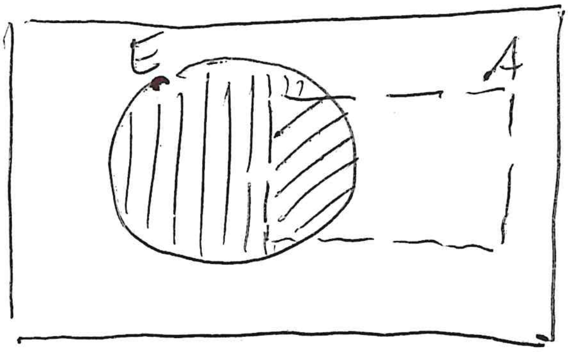


MISURA DI LEBESGUE IN $\mathbb{R}^n$

$A \subset \mathbb{R}^n$ È LEBESGUE MISURABILE SE

$$\lambda^{*(n)}(E) = \lambda^{*(n)}(E \cap A) + \lambda^{*(n)}(E - A)$$

PER OGNI $E \subset \mathbb{R}^n$



QUINDI A MISURABILE SE PERMETTE DI "SPEZZARE" OGNI INSIEME E IN $E \cap A$, $E \cap A^c = E - A$ IN MANIERA TALE CHE LA MISURA (ESTERNA) DI E SI RICOSTRUISCE DA QUELLA DI $A \cap E$, $A - E$ IN MANIERA ADDITIVA.

SIA $\mathcal{L}^{(n)}$ L'INSIEME DEGLI INSIEMI LEBESGUE MISURABILI

MISURA DI LEBESGUE IN $\mathbb{R}^n$

RIESCE:

1) $\mathcal{B}^{(n)} \subsetneq \mathcal{L}^{(n)} \subsetneq 2^{\mathbb{R}^n}$

2) $\underbrace{\lambda^{*(n)}\Big|_{\mathcal{L}^{(n)}}}_{\equiv \lambda^{(n)}}$ È UNA MISURA SU $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^{(n)})$

3) $\lambda^{(n)}$ DEFINITA IN (2) COINCIDE CON $\lambda^{(n)}$ SUI RETTANGOLI:

$$\lambda^{*(n)}(I) = \lambda^{(n)}(I)$$

4) $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^{(n)}, \lambda^{(n)})$ È σ-FINITO

5) OGNI INSIEME FINITO O NUMERABILE HA MISURA NULLA

TEORIA DELLA MISURA

$(\Omega, \mathcal{F}, m)$ SPAZIO DI MISURA

$\Omega_0 \subset \Omega$

COME DEFINIRE UNA σ-ALGEBRA E UNA MISURA SU Ω_0?

$$\mathcal{F}_0 = \{ A \cap \Omega_0 : A \in \mathcal{F} \}$$

È UNA σ-ALGEBRA SU Ω_0.

QUANDO $\Omega_0 \in \mathcal{F}$,

$$\mathcal{F}_0 = \{ A : A \in \mathcal{F}, A \subset \Omega_0 \}$$

SE $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{C})$, ALLORA $\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{C}_0)$

CON

$$\mathcal{C}_0 = \{ A \cap \Omega_0 : A \in \mathcal{C} \}$$

TEORIA DELLA MISURA

$(\Omega, \mathcal{F})$ $\quad \Omega_0 \in \mathcal{F}$

$(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$

m MISURA SU $(\Omega, \mathcal{F})$

m_0 MISURA SU $(\Omega_0, \mathcal{F}_0)$
DEFINITA IN MANIERA
"NATURALE" DA

$$A \in \mathcal{F}_0 \iff A \in \mathcal{F},\ A \subset \Omega_0$$

$$m_0(A) = m(A)$$

"TRACCIA" DELLA MISURA m SULLA
σ-ALGEBRA TRACCIA $\mathcal{F}_0$

ESEMPIO: $(\Omega, \mathcal{F}, m) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^{(n)}, \lambda^{(n)})$

$$\Omega_0 = [0,1]^n$$

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{L}^{(n)}_0$$

$\lambda^{(n)}_0$ = MISURA DI LEBESGUE RISTRETTA A Ω_0

È UNA PROBABILITÀ!