PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

IDEA: COME AGGIORNARE LA VALUTAZIONE IN BASE A NUOVE INFORMAZIONI?

SE SI SA CHE "B" È VERO, COME CAMBIA LA VALUTAZIONE DELL'EVENTO A?

$$P(A|B)$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA DI A DATO B (PROB. DI A CONDIZIONATA A B / A DATO B

OSSERVAZIONE: CONDIZIONARE A "B" POTREBBE ESSERE

- IPOTESI DI LAVORO
- EFFETTIVO (AUMENTO) ARRIVO DI INFORMAZIONI

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ SPAZIO DI PROB.

$A, B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$

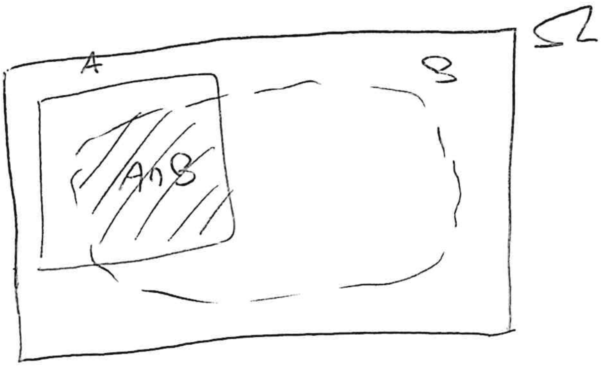
DEFINIAMO

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

IDEA: SE B SI VERIFICA, ALLORA IL NUOVO SPAZIO DEI CASI POSSIBILI È $B \subset \Omega$

QUINDI A SI VERIFICA SOLO SE SI VERIFICA $A \cap B$, CON PROBABILITÀ $P(A \cap B)$.

PER OTTENERE UNA PROBABILITÀ SI DEVE NORMALIZZARE IL RISULTATO DIVIDENDO PER $P(B)$



PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

ESEMPIO: LANCIO DI DUE DADI

A = "SOMMA DEI DUE DADI È 7"

B = "IL MAX È 5"

$$P(A|B) \gtreqless P(A) = \frac{1}{6} ?$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(B) = \frac{1}{4}$$

$$P(A \cap B) = P(\{(5,2),(2,5)\})$$

$$= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9} > \frac{1}{6}$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

PROPRIETÀ DELLA PROB. CONDIZIONATA

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

(1) "TEOREMA" DELLE PROBABILITÀ COMPOSTE

$A, B \in \mathcal{F}$

$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$ SE $P(B) > 0$

$= P(A) \cdot P(B|A)$ SE $P(A) > 0$

VALUTAZIONE SEQUENZIALE DI EVENTI!

(2) $A, A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathcal{F}$ CON

$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) > 0$

$P(A \cap A_1 \cap \ldots \cap A_n) =$

$= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots$

$\ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdot$

$\cdot P(A|A_1 \cap \ldots \cap A_n)$

$\Rightarrow$ SEQUENZA DI VALUTAZIONI

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

(3) "DISINTEGRABILITÀ" DELLA PROBABILITÀ

SE $\{B_1, \dots, B_n, \dots\} \subset \mathcal{F}$ È UNA PARTIZIONE FINITA O NUMERABILE DI Ω CON

$P(B_i) > 0$ PER OGNI i,

ALLORA PER OGNI $A \in \mathcal{F}$

$$\underbrace{P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \cdot P(A|B_n)}_{\text{"MISTURA"}}$$

$\equiv$ MEDIA PESATA DI $(P(A|B_n))_n$ CON PESI $(P(B_n))_n$

DA CUI

$$\min_n P(A|B_n) \leq P(A) \leq \max_n P(A|B_n)$$

$\Rightarrow$ RICOSTRUIRE $P(A)$ DALLE PROB. CONDIZIONATE A VARIE ALTERNATIVE ESAUSTIVE

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

(4) $A, B \in \mathcal{F}$, $0 < P(B) < 1$

$$P(A) = P(A|\overline{B})\, P(\overline{B}) + P(A|B)\, P(B)$$

(5) TEOREMA DI BAYES

$A, B \in \mathcal{F}$, $P(A) > 0$, $P(B) > 0$

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)}$$

IN PARTICOLARE, PER UNA PARTIZIONE FINITA O NUMERABILE $\{B_1, \dots, B_n \dots\} \subset \mathcal{F}$ CON $P(B_n) > 0$ PER OGNI n, SI HA

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\, P(B_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

TEOREMA DI BAYES;

INTERPRETAZIONE:

B = "IPOTESI"

A = "OSSERVAZIONE"

P(B) = VALUTAZIONE "INIZIALE" SULL' IPOTESI

SI OSSERVANO DEI DATI, L'EVENTO A

SI AGGIORNA LA VALUTAZIONE IN BASE ALLA NUOVA INFORMAZIONE:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B})}$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

(6) $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$

ALLORA

$$P_B : \mathcal{F} \longrightarrow [0,1]$$

DEFINITA DA

$$P_B(A) = P(A|B) \quad , \quad A \in \mathcal{F}$$

È UNA PROBABILITÀ SU $(\Omega, \mathcal{F})$

INOLTRE SE $C \in \mathcal{F}$ TALE CHE $P(B \cap C) > 0$, ALLORA

$$(P_B)_C \equiv P_{B \cap C}$$

"CONDIZIONARE IN SUCCESSIONE A B E POI A C" ≡ ≡ "CONDIZIONARE A $B \cap C$"

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

ESEMPIO: IN UNA POPOLAZIONE, 48% MASCHI, 52% FEMMINE AD ETÀ 50.
LA PROB. DI SOPRAVVIVENZA A 10 ANNI PER M/F È 0.9, 0.95

SELEZIONANDO UNA PERSONA DI 50 ANNI A CASO, QUAL È LA PROB. DI SOPRAVVIVENZA A 10 ANNI?

B = "LA PERSONA SELEZIONATA È MASCHIO"

A = "LA PERSONA SOPRAVVIVE 10 ANNI"

$$P(A) = \underbrace{P(A|B)}_{0.9} \underbrace{P(B)}_{0.48} + \underbrace{P(A|\bar{B})}_{0.95} \underbrace{P(\bar{B})}_{0.52}$$

$$= 0.926$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

ESEMPIO: 5 MONETE;
2 CON 2 FACCE UGUALI T
1 CON " " " C
2 "NORMALI" T E C

SI SCEGLIE A CASO UNA MONETA E SI LANCIA

(i) PROB. CHE ESCA TESTA

(ii) SE ~~LA~~ ~~FACCIA~~ ESCE TESTA, CHE PROB. CHE LA MONETA SIA NORMALE

(iii) SE ESCE TESTA, CHE PROB CHE LA FACCIA INFERIORE SIA TESTA?

TT = "LA MONETA SCELTA È TT"
CC = " " " " " CC"
TC = " " " " " TC"

$$P(TT) = P(TC) = \frac{2}{5}$$

$$P(CC) = \frac{1}{5}$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

E_1 = "DOPO IL PRIMO LANCIO, LA FACCIA È TESTA"

(i) $$P(E_1) = \underbrace{P(E_1|TT)}_{=1}\underbrace{P(TT)}_{\frac{2}{5}} +$$

$$+\underbrace{P(E_1|CC)}_{=0}\underbrace{P(CC)}_{\frac{1}{5}} + \underbrace{P(E_1|TC)}_{\frac{1}{2}}\underbrace{P(TC)}_{\frac{2}{5}}$$

$$= \frac{2}{5} + 0 + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

(ii) $$P(\underbrace{TC}_{\text{IPOTESI}}|\underbrace{E_1}_{\text{OSSERVAZIONE}}) \overset{\text{BAYES}}{=} \frac{P(E_1|TC)P(TC)}{P(E_1)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\cancel{2}}\ \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}}{\frac{3}{\cancel{5}}} = \frac{1}{3} < P(TC)$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

F_1 = "DOPO IL PRIMO LANCIO, LA FACCIA INFERIORE È TESTA"

(iii) $P(F_1|E_1) =$

$$= \frac{P(F_1 \cap E_1)}{P(E_1)} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3} > P(F_1)$$

$$P(F_1 \cap E_1) = \underbrace{P(F_1 \cap E_1 | TT)}_{1} \underbrace{P(TT)}_{\frac{2}{5}} +$$

$$+ \underbrace{P(F_1 \cap E_1 | CC)}_{0} \underbrace{P(CC)}_{\frac{1}{5}} +$$

$$+ \underbrace{P(F_1 \cap E_1 | TC)}_{0} \underbrace{P(TC)}_{\frac{2}{5}} = \frac{2}{5}$$

$$P(F_1) = P(E_1) = \frac{3}{5}$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

ESEMPIO: IN MATEMATICA ATTUARIALE VITA, SI CONSIDERA PER UN INDIVIDUO NEONATO

E_x = "L'INDIVIDUO SOPRAVVIVE A ETÀ x" , $x \geq 0$

SIMBOLO ATTUARIALE: $_tP_x = P(E_{x+t} | E_x)$ $\quad t \geq 0$, $x \geq 0$

PROPRIETÀ DI $_tP_x$:

$t \geq 0$, $s \geq 0$

$$\boxed{_{t+s}P_x = {_tP_x} \cdot {_sP_{x+t}}}$$

$$_{t+s}P_x = P(E_{x+t+s} | E_x) =$$

$$= P(E_{x+t+s} \cap E_{x+t} | E_x)$$

THM. PROB. COMPOSTE

$$= P(E_{x+t+s} | \underbrace{E_{x+t} \cap E_x}_{= E_{x+t}}) \cdot$$

$$\cdot P(E_{x+t} | E_x)$$

$$= {_tP_x} \cdot {_sP_{x+t}}$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $A, B \in \mathcal{F}$ $P(B) > 0$

A CORRELATO POSITIVAMENTE (NEGATIVAMENTE)

CON B SE $P(A|B) > P(A)$
$(<)$

A NON CORRELATO (INDIPENDENTE) CON B SE

$$P(A|B) = P(A)$$

LA RELAZIONE È SIMMETRICA
(SE ANCHE $P(A) > 0$)

IDEA: CONOSCERE B HA UN EFFETTO POSITIVO/NEGATIVO/NON HA EFFETTO SULLA VALUTAZIONE DI A