PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad A, B \in \mathcal{F}$

A, B SONO INDIPENDENTI SE

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

"FATTORIZZAZIONE": SEMPLIFICA IL CALCOLO DI $P(A \cap B)$ NEL PRODOTTO DELLE PROBABILITÀ.

SEGUE CHE

$$P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$$

CON $A' = A$ O $A' = \bar{A}$,
$\quad B' = B$ O $B' = \bar{B}$

QUINDI A', B' INDIPENDENTI!

OSSERVAZIONE: SE $P(A) \in \{0, 1\}$, IN PARTICOLARE $A = \emptyset$ O $A = \Omega$, ALLORA A, B INDIPENDENTI QUALUNQUE SIA B

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

SE $P(B) > 0$,

A, B INDIPENDENTI SE E SOLO SE $P(A|B) = P(A)$

CONOSCERE B NON MODIFICA LA VALUTAZIONE DI A

SE $0 < P(A) < 1$, $0 < P(B) < 1$ ALLORA A, B INDIPENDENTI IMPLICA

$$P(A'|B') = P(A')$$
$$P(B'|A') = P(B')$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$(A_\alpha)_{\alpha \in I} \subset \mathcal{F}$

FAMIGLIA QUALUNQUE DI EVENTI SONO INDIPENDENTI SE PER OGNI $n \geq 1$, PER OGNI $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n \in I$ DISTINTI

$$P(A_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} \cap \ldots \cap A_{\alpha_n}) =$$
$$= P(A_{\alpha_1}) \cdot P(A_{\alpha_2}) \cdot \ldots \cdot P(A_{\alpha_n})$$

CON n EVENTI $A_1, \ldots, A_n$ SI TRATTA DI $2^n - n - 1$ CONDIZIONI (EQUAZIONI) TUTTE NECESSARIE

ESEMPIO: $n=3$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2)$$
$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_3)$$
$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) \cdot P(A_3)$$
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3)$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$ CON $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{F}$

OGNI $\mathcal{A}_\alpha$ È UN INSIEME DI EVENTI

LE FAMIGLIE $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$ SONO INDIPENDENTI SE PER OGNI $n \geq 1$, PER OGNI $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in I$ DISTINTI, PER OGNI $A_1 \in \mathcal{A}_{\alpha_1}, \dots, A_n \in \mathcal{A}_{\alpha_n}$,

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot \dots \cdot P(A_n)$$

GLI EVENTI ALL'INTERNO DI OGNI CLASSE $\mathcal{A}_\alpha$ NON SONO NECESSARIAMENTE INDIPENDENTI

CONOSCENZA DEL VALORE LOGICO DI UNA O PIÙ DELLE CLASSI $\mathcal{A}_\alpha$ NON HA EFFETTO SULLA VALUTAZIONE DEGLI EVENTI DI *ALTRE* CLASSI

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

LE DUE DEFINIZIONI SONO CONSISTENTI: $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ FAMIGLIA DI EVENTI,

$(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ INDIPENDENTI SE E SOLO SE $\mathcal{A}_\alpha = \{A_\alpha\}$, $\alpha \in I$ SONO INDIPENDENTI

DOMANDA: SE $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\} \subset \mathcal{F}$

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \dots\} \subset \mathcal{F}$

SONO INDIPENDENTI,

E $A \in \sigma(\mathcal{A})$, $B \in \sigma(\mathcal{B})$,

È VERO CHE A, B SONO INDIPENDENTI?

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

SE $~~\mathcal{A}_\alpha~~$ $(\mathcal{A}_\alpha)_{\alpha \in I}$, $\mathcal{A}_\alpha \subset \mathcal{F}$, SONO INDIPENDENTI E

* $\mathcal{A}_\alpha$ È CHIUSO RISPETTO ALL'INTERSEZIONE, PER OGNI $\alpha \in I$
CIOÈ
SE $A, B \in \mathcal{A}_\alpha \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}_\alpha$

ALLORA $(\sigma(\mathcal{A}_\alpha))_{\alpha \in I}$ SONO INDIPENDENTI

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ CON $A_\alpha \in \mathcal{F}$ PER OGNI $\alpha \in I$

EVENTI INDIPENDENTI.

SE $(I_\beta)_{\beta \in J}$ È UNA PARTIZIONE DI I,

ALLORA, POSTO

$$\mathcal{G}_\beta = \sigma(\{A_\alpha, \alpha \in I_\beta\}) \quad \beta \in J$$

LE σ- ALGEBRE $(\mathcal{G}_\beta)_{\beta \in J}$ SONO INDIPENDENTI

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

UN EVENTO ~~(I~~(INSIEME) A È QUASI CERTO (SI VERIFICA QUASI CERTAMENTE) SE

$$A^c \subset B \quad , B \in \mathcal{F} \quad , \; P(B) = 0$$

(A POTREBBE NON ESSERE IN $\mathcal{F}$)

IN PARTICOLARE, SE $P(A) = 1$

TIPICAMENTE SI HA UNA PROPRIETÀ $p(\omega)$ DIPENDENTE DA $\omega \in \Omega$

ALLORA SI PONE $A = \{\omega : p(\omega) \text{ È VERA}\}$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

ESEMPIO: INFINITI LANCI DI UNA MONETA (EQUA)

$$\Omega = \{ \overbrace{L_1 L_2 L_3 \ldots L_n \ldots}^{\omega},\ L_n = T \text{ o } L_n = C \text{ IN TUTTI I MODI POSSIBILI} \}$$

∞ NON NUMERABILE

E_n = " ESCE TESTA AL LANCIO n "

$$= \{ L_1 L_2 \ldots L_{n-1} T L_{n+1} \ldots,\ L_i = T \text{ o } L_i = C \}$$

$$\mathcal{F} = \sigma(\{E_1, E_2, \ldots, E_n \ldots\}) \subsetneq 2^{\Omega}$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

P PROBABILITÀ SU $(\Omega, \mathcal{F})$

TALE CHE

* $P(E_n) = \frac{1}{2}$

* $\{E_1 \ldots E_n \ldots\}$ INDIPENDENTI

$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n$

$$P(E'_{i_1} \cap E'_{i_2} \cap \ldots \cap E'_{i_n}) =$$

$$= P(E'_{i_1}) \cdot P(E'_{i_2}) \cdot \ldots \cdot P(E'_{i_n})$$

$$= \frac{1}{2^n}$$

$$E'_{i_j} = \begin{cases} E_{i_j} \\ \overline{E_{i_j}} \end{cases}$$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

(i) $\omega \in \Omega$ UNA QUALUNQUE SEQUENZA

$\omega = E_1' \cap E_2' \cap \ldots \cap E_n' \cap \ldots \in \mathcal{F}$

$P(\{\omega\}) = ?$

AD ESEMPIO:

$\omega = TTT \ldots T \ldots$ = "ESCE SEMPRE TESTA"

$A_1 = E_1$

$A_2 = E_1 \cap E_2$

$\vdots$

$A_n = E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n$

$\vdots$

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ DECRESCENTI

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{TTTT \ldots T \ldots\}$

CONTINUITÀ

$P(\{TTT \ldots T \ldots\}) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \overbrace{P(A_n)}^{1/2^n} = 0$

OPPURE VIA MONOTONIA

$\{\omega\} \subset A_n \quad \forall n$

$0 \le P(\{\omega\}) \le P(A_n) = \frac{1}{2^n} \quad \forall n \Rightarrow P(\{\omega\}) = 0$

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

(ii) A = "TESTA APPARE PRIMA O POI"

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$
$$= 1 - \underbrace{P(\{CCC\ldots C\ldots\})}_{=0}$$
$$= 1$$

(iii) B_k = "UNA DATA SEQUENZA DI T E C CONSECUTIVE DI LUNGHEZZA k SI VERIFICA PRIMA O POI"

$k \geq 1$

ESEMPIO: $\underset{\overset{\shortparallel}{k}}{100}$ TESTE CONSECUTIVE

MOSTRIAMO CHE

$P(B_k) = 1$ QUALUNQUE SIA $k \geq 1$, QUALUNQUE SIA LA SEQUENZA

PROBABILITÀ CONDIZIONATA E INDIPENDENZA

$\overline{B}_k$ = "LA SEQUENZA NON SI VERIFICA MAI"

$\subset$ "LA SEQUENZA NON SI VERIFICA NEI PRIMI $n \cdot k$ LANCI" $\forall n$

$\subset \boxed{\text{"LA SEQUENZA NON APPARE IN UNO DEI PRIMI } n \text{ BLOCCHI CONSECUTIVI DI LUNGHEZZA } k\text{"}}$

D_k

$$\underbrace{1 \quad\quad\quad k}_{1} \quad \underbrace{k+1 \; - - - \; 2k}_{2} \quad - - - - \quad \underbrace{(n-1)k+1 \ldots\ldots nk}_{n}$$

EVENTI RELATIVI AI VARI BLOCCHI SONO <u>INDIPENDENTI</u> (VEDI TEOREMA PRECEDENTE)

$$P(D_k) = \overbrace{\underbrace{\left(1 - \underbrace{\frac{1}{2^k}}_{\text{PROB. CHE LA DATA SEQUENZA APPARE NEI PRIMI K LANCI}}\right)}_{\text{PROB. CHE LA DATA SEQUENZA NON APPARE}}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) \cdots\cdots \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}^{n \text{ VOLTE}}$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)}_{<1}^{n} \longrightarrow 0$$

$$P(\overline{B}_k) \leq P(D_k) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n} \longrightarrow 0$$

$$\Rightarrow P(B_k) = 1$$