Spazi compatti

Def Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi $U_i \subset X$ $\forall i \in I$. Diciamo che $\mathcal{U}$ è un <u>ricoprimento aperto</u> di X se U_i è aperto in X $\forall i \in I$ e

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i .$$

Se $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è un ricoprimento aperto di X e $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ è una sottofamiglia, cioè $\mathcal{U}' = \{U_i\}_{i \in I'}$ per un certo $I' \subset I$, diciamo che $\mathcal{U}'$ è un <u>sottoricoprimento</u> di $\mathcal{U}$ se $\mathcal{U}'$ è a sua volta un ricoprimento aperto di X.

Se $A \subset X$ e $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di aperti di X t.c.

$$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i ,$$

con abuso di linguaggio diremo che $\mathcal{U}$ è un <u>ricoprimento aperto</u> di A.

OSS A rigore il ricoprimento aperto di A è $\mathcal{V} = \{U_i \cap A\}_{i \in I}$.

Def Uno spazio topologico X è <u>compatto</u> se per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ di X esiste un sottoricoprimento finito
$$\mathcal{U}' = \{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\} \subset \mathcal{U},$$
ovvero $\exists\, n \in \mathbb{N}$ e $\exists\, i_1, \dots, i_n \in I$ t.c.
$$X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}.$$

Es 1) Gli spazi banali sono compatti

2) Gli spazi finiti sono compatti.

3) Uno spazio discreto è compatto $\Longleftrightarrow$ è finito.
Infatti se X_{dis} è compatto $\Rightarrow$
$S = \{\{x\}\}_{x \in X}$ è un ricoprimento aperto di X
$\Rightarrow \exists$ sottoricoprimento finito $\Rightarrow X_{dis}$ finito.

Teorema Sia X uno spazio compatto e sia $A \subset X$ un chiuso. Allora A è compatto.

Dim $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, $U_i \subset A$ $\forall i \in I$, ricoprimento aperto di A $\Rightarrow \forall i \in I\ \exists\, \tilde{U}_i \subset X$ aperto in X t.c. $U_i = \tilde{U}_i \cap A$ $\forall i \in I \Rightarrow$
$\tilde{\mathcal{U}} = \{X - A\} \cup \{\tilde{U}_i\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto di $X \rightsquigarrow \{X - A, \tilde{U}_{i_1}, \dots, \tilde{U}_{i_n}\}$ sottoricoprimento finito di $\tilde{\mathcal{U}}$
$\Rightarrow A = \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \Rightarrow \{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ sottoricoprim. di $\mathcal{U}$.

Oss Il viceversa non vale. Controesempio:

$X=\{1,2\}$ con la topologia banale è compatto

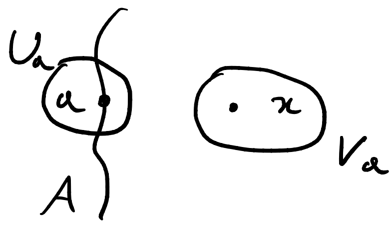
$\{1\}\subset X$ è compatto ma non è chiuso in X.

Teorema Sia X uno spazio di Hausdorff e sia $A\subset X$ un sottospazio compatto. Allora A è chiuso in X.

Dim Mostriamo che $X-A$ è aperto.

Sia $x\in X-A$. Per ogni $a\in A$ $\exists\, U_a, V_a\subset X$ aperti t.c. $a\in U_a$, $x\in V_a$, $U_a\cap V_a=\emptyset$.

$\{U_a\}_{a\in A}$ ricoprim. aperto di A



$\Longrightarrow \exists\, a_1,\dots,a_n\in A$ t.c.

$\{U_{a_1},\dots,U_{a_n}\}$ sottoricoprimento finito di A

$U=\bigcup_{i=1}^{n} U_{a_i}$, $\quad V=\bigcap_{i=1}^{n} V_{a_i}$ $\quad$ aperti in X

$A\subset U$, $\quad x\in V$, $\quad U\cap V=\emptyset$

$x\in V\subset X-A$, V aperto in X.

Quindi $X-A$ aperto in X.

Teorema Sia $f: X \to Y$ continua. Supponiamo che X sia compatto. Allora $f(X)$ è compatto come sottospazio topologico di Y. Quindi se f è anche suriettiva, allora Y è compatto.

Dim A meno di restringere f all'immagine, non è restrittivo supporre f suriettiva.

Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $Y \Rightarrow$
$\{f^{-1}(U_i)\}_{i \in I}$ ricoprimento aperto di $X \Rightarrow$
$\exists \{f^{-1}(U_{i_1}), \dots, f^{-1}(U_{i_n})\}$ sottoricoprimento finito.
Allora $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_n}\}$ è un sottoricoprimento finito di $\{U_i\}_{i \in I}$ per Y, dato che
$U_i = f(f^{-1}(U_i))$.

Teorema Sia $f: X \to Y$ continua e biiettiva. Se X è compatto e Y è di Hausdorff, allora f è un omeomorfismo.

Dim Resta da far vedere che $f^{-1}: Y \to X$ è continua o equivalentemente che f è aperta.

Sia $U \subset X$ aperto in $X \Rightarrow X - U \subset X$ chiuso
$\Rightarrow X - U$ compatto $\Rightarrow f(X-U) = Y - f(U)$ compatto $\Rightarrow Y - f(U)$ chiuso (per il teorema)
$\Rightarrow f(U)$ aperto in Y.

Corollario Sia $f: X \to Y$ continua e iniettiva. Se X è compatto e Y è di Hausdorff, allora f è un'immersione.

Dim La restrizione $f_| : X \to f(X)$ è continua e biiettiva. Inoltre $f(X)$ è di Hausdorff in quanto sottospazio di Y, e X è compatto. Quindi $f_| : X \to f(X)$ è un omeomorfismo $\Rightarrow$ $f: X \to Y$ immersione.

Def Un'applicazione $f: X \to Y$ è chiusa se $\forall A \subset X$ chiuso $\Rightarrow f(A) \subset Y$ chiuso.

Teorema Sia $f: X \to Y$ continua. Se X è compatto e Y è di Hausdorff, allora f è chiusa.

Dim $\boxed{E}$