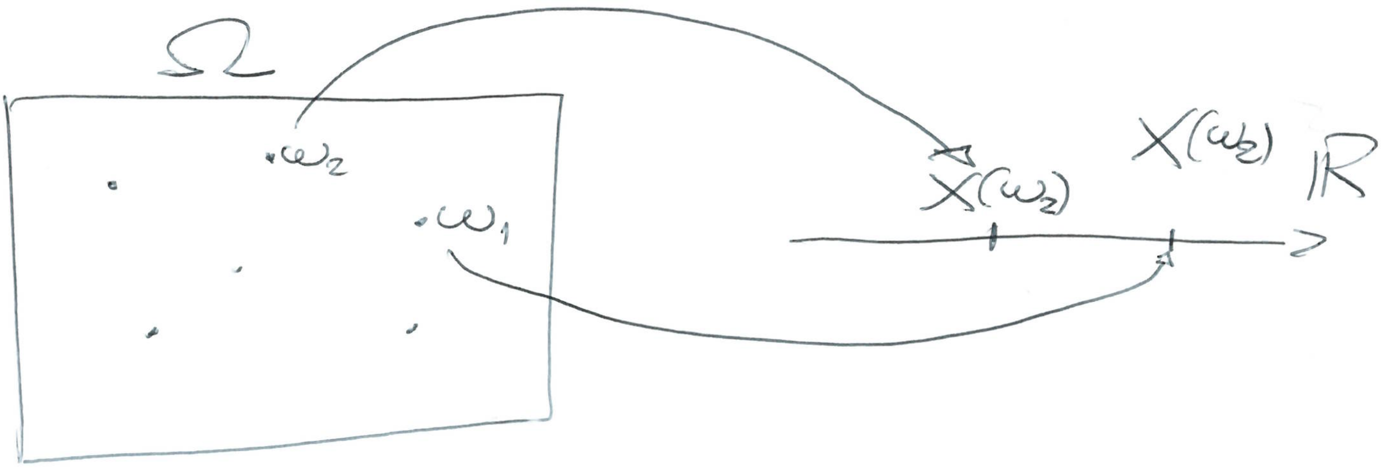
VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

IDEA: PER UN DATO ESPERIMENTO SI POSSONO CALCOLARE DIVERSE QUANTITÀ, O ENTI, DI DIVERSO TIPO, CHE DIPENDONO DAL RISULTATO DELL'ESPERIMENTO

$\Rightarrow$ FUNZIONI DA Ω, SPAZIO DEGLI STATI DEL MONDO, IN $\mathbb{R}$ (O IN UN ALTRO INSIEME)



$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\omega \quad\quad X(\omega)$$

IL VERO ω NON È NOTO, QUINDI IL VALORE DI X NON È NOTO

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

ESEMPIO: LANCIO DI DUE DADI

$$\Omega = \{(i,j), \quad 1 \le i,j \le 6\}$$

RISULTATO DEL 1° DADO

$$X_1((i,j)) = X(i,j) = i$$

PER SEMPLICITÀ

$$X_2(i,j) = j \qquad \text{2° DADO}$$

SOMMA DEI DUE DADI

$$Z(i,j) = i + j$$

PRODOTTO, MASSIMO, MINIMO, SCARTO FRA I DUE DADI

$$W(i,j) = i \cdot j$$

$$M(i,j) = \max(i,j) \qquad m(i,j) = \min(i,j)$$

$$S(i,j) = |i - j|$$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

ESEMPIO: INFINITI LANCI DI UNA MONETA

$$\Omega = \{ \underbrace{L_1 L_2 L_3 \dots L_n \dots}_{\omega} : L_i = T \text{ o } C \}$$

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{SE } L_n = C \\ 1 & \text{SE } L_n = T \end{cases}$$

"INDICATORE" DI TESTA ALL' n-ESIMO LANCIO

$T_n(\omega)$ = NUMERO DI TESTE NEI PRIMI n LANCI

$$= X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)$$

$W(\omega)$ = TEMPO DI ATTESA PER LA PRIMA TESTA

$$= k \quad \text{SE} \quad \omega = \underset{1}{C}\underset{2}{C}C \dots \underset{k-1}{C}\underset{k}{T} L_{k+1} L_{k+2} \dots$$

$$= +\infty \quad \text{SE} \quad \omega = CCC \dots \dots CCC \dots$$

C_n = NUMERO MASSIMO DI TESTE CONSECUTIVE NEI PRIMI n LANCI

$$\omega = CTTCTTTCCCT$$

$$C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 2, C_4 = 2, C_5 = 2 \dots$$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

PER VARIE RAGIONI, SOLO ALCUNE APPLICAZIONI POSSONO ESSERE CONSIDERATE, QUELLE MISURABILI

$$\underset{\text{INSIEME}}{\Omega},\ \underset{\sigma\text{-ALGEBRA}}{\mathcal{F}}) \qquad (\underset{\text{ALTRO INSIEME}}{\Omega'},\ \underset{\text{ALTRA } \sigma\text{-ALGEBRA}}{\mathcal{F}'})$$

2 SPAZI MISURABILI

$f: \Omega \to \Omega'$ È $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-MISURABILE

SE PER OGNI $A' \in \mathcal{F}'$,

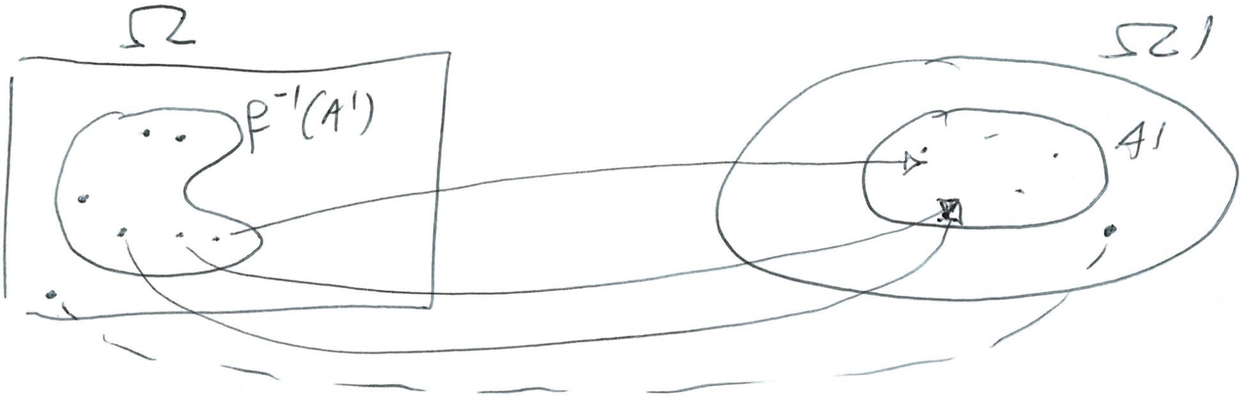
$$\underbrace{f^{-1}(A')}_{\text{CONTRO IMAGINE DI } A'} \in \mathcal{F}$$

SE $\mathcal{F}$ E/O $\mathcal{F}'$ SONO FISSATE IN MANIERA NON EQUIVOCA, ALLORA SI PUÒ DIRE "f È MISURABILE"

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$$A' \subset \Omega'$$

$$f^{-1}(A') = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in A'\}$$



PROPRIETÀ DELLA CONTROIMAGINE:

* $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
* $f^{-1}(\Omega') = \Omega$
* $f^{-1}(\overline{A'}) = \overline{f^{-1}(A')}$
* $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha \in I} A'_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(A'_\alpha)$
* $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha \in I} A'_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in I} f^{-1}(A'_\alpha)$

LA CONTROIMAGINE "COMMUTA" CON LE OPERAZIONI TRA INSIEMI

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

ESEMPI DI APPLICAZIONI MISURABILI

* $f : \Omega \to \Omega'$ COSTANTE

  $f(\omega) = \bar{\omega}'$ PER OGNI $\omega \in \Omega$
  E FISSATO $\bar{\omega}' \in \Omega'$

  È $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-MISURABILE PER OGNI $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$

* $\Omega = \Omega'$, f APPLICAZIONE IDENTICA

  $f(\omega) = \omega$ FOR $\omega \in \Omega$

  QUANDO È $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$- MISURABILE?

* $f : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathcal{F}'}{\Omega'}$

  SEMPRE $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ MISURABILE SE

  $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ O SE $\mathcal{F}' = \{\emptyset, \Omega'\}$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$$f : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathcal{F}'}{\Omega'}$$

$\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ - MISURABILE

ALLORA È ANCHE $\mathcal{G}/\mathcal{G}'$-
-MISURABILE PER OGNI

$\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ σ-ALGEBRA

$\mathcal{F}' \supset \mathcal{G}'$, $\mathcal{G}'$ σ-ALGEBRA

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ SPAZIO DI PROBABILITÀ

$$X : \Omega \to \mathbb{R}$$

È UNA VARIABILE ALEATORIA (V.A)
SE È $\mathcal{F}/\mathcal{B}$ MISURABILE

NOTAZIONE: $B \in \mathcal{B}$

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$$

$$= \underbrace{\{X \in B\}}_{\text{PIÙ SEMPLICE COME NOTAZIONE}} \in \mathcal{F}$$

QUINDI SI PUÒ CALCOLARE

$$P(\{X \in B\})\ !$$

A VOLTE SCRITTO

$$P(X \in B)$$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$A \subset \Omega$

INDICATORE DI A:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega \notin A \\ 1 & \omega \in A \end{cases}$$

1_A È $\mathcal{F}$-MISURABILE SSE $A \in \mathcal{F}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

V.A. SEMPLICE SE PRENDE UN NUMERO FINITO DI VALORI (DETERMINAZIONI)

È SEMPRE POSSIBILE SCRIVERE

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot 1_{A_i} \qquad \text{CON } x_i \in \mathbb{R},\ A_i \in \mathcal{F}$$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

È DISCRETA SE PRENDE AL PIÙ UN NUMERABILE DI VALORI (DETERMINAZIONI)

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$

IN UNO SPAZIO DI PROB. DISCRETO, OGNI V.A. È DISCRETA

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$$f : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{E}')}{\Omega'}$$

SE $f^{-1}(A') \in \mathcal{F}$ PER OGNI $A' \in \mathcal{E}'$, ALLORA f È $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$ MISURABILE

ESEMPIO: $\Omega' = \mathbb{R}^m$

$\mathcal{F}' = \mathcal{B}^m = \sigma(\{\text{RETTANGOLI}\})$

QUINDI BASTA VERIFICARE CHE

$f^{-1}(I) \in \mathcal{F}$ PER OGNI I (IPER) RETTANGOLO

NOTAZIONE: $\Omega' = \mathbb{R}$ $\mathcal{F}' = \mathcal{B}$

$\{f > a\} = f^{-1}((a, +\infty))$

E SIMILI

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$$f : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathcal{F}'}{\Omega'}$$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI MISURABILI

1) COMPOSIZIONE

$$f : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathcal{F}'}{\Omega'} \quad \mathcal{F}/\mathcal{F}'\text{-MISURABILE}$$

$$g : \underset{\mathcal{F}'}{\Omega'} \longrightarrow \underset{\mathcal{F}''}{\Omega''} \quad \mathcal{F}'/\mathcal{F}''\text{-MISURABILE}$$

ALLORA $g \circ f : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathcal{F}''}{\Omega''}$

$(g \circ f)(\omega) = g(f(\omega))$

È $\mathcal{F}/\mathcal{F}''$-MISURABILE

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

2) $\Omega' = \mathbb{R}$
$\mathcal{F}' = \mathcal{B}$

OPERAZIONI FRA FUNZIONI MISURABILI DANNO ANCORA FUNZIONI MISURABILI

$$f, g : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}}$$ MISURABILI

ALLORA

$$f+g, \quad f \cdot g, \quad k \cdot f \quad (k \in \mathbb{R})$$

SONO MISURABILI

$\frac{f}{g}$ È MISURABILE

SE $g(\omega) \neq 0$ PER OGNI ω.
BASTA CHE, SE P PROB. SU $(\Omega, \mathcal{F})$

$$P(\{g=0\}) = 0 \qquad g \neq 0 \text{ Q.C.}$$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

3) A VOLTE CONVIENE CONSIDERARE

$$\Omega' = \overline{\mathbb{R}} = \text{RETTA ESTESA}$$

$$= \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

LA σ-ALGEBRA DEI BORELIANI IN $\overline{\mathbb{R}}$ È GENERATA DAGLI INTERVALLI, A CUI SI AGGIUNGONO I SIMBOLI $+\infty$, $-\infty$

$$\overline{\mathcal{B}} = \sigma\Big(\big\{(-\infty, a],\ a \in \mathbb{R}$$
$$[-\infty, a],\ a \in \mathbb{R}\big\}\Big)$$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

3) $f_n : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}}$

$(f_n)_{n \geq 1}$ SUCCESSIONE DI FUNZIONI MISURABILI

ALLORA

$\sup_{n \geq 1} f_n : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\overline{\mathcal{B}}}{\overline{\mathbb{R}}}$

$\inf_{n \geq 1} f_n : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \quad \underset{\overline{\mathcal{B}}}{\overline{\mathbb{R}}}$

SONO $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{B}}$ MISURABILI

GLI INSIEMI

$E = \{\omega : \lim_{n \to \infty} f_n(\omega)$ ESISTE FINITO (IN $\mathbb{R}$)$\} \in \mathcal{F}$

$E' = \{\omega : \lim_{n \to \infty} f_n(\omega)$ ESISTE IN $\overline{\mathbb{R}}\} \in \mathcal{F}$

SE IN $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $P(E) = 1$,
ALLORA $\lim_n f_n$ È $\mathcal{F}/\mathcal{B}$-MISURABILE

SE $P(E') = 1$, $\lim_n f_n$ È $\mathcal{F}/\overline{\mathcal{B}}$-MISURABILE

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

4) $\underset{\mathcal{B}^n}{\Omega} = \mathbb{R}^n$, $\underset{\mathcal{B}}{\Omega'} = \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

SE L'INSIEME DEI PUNTI DI DISCONTINUITÀ DI f È NUMERABILE O FINITO, f È MISURABILE.

SE $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ CON $A \subset \mathbb{R}^n$ $(A \in \mathcal{B}^n)$

SI CONSIDERA LA σ-ALGEBRA TRACCIA SU A,

$\mathcal{B}^n_A = \{B \cap A : B \in \mathcal{B}^n\} =$

$= \{B \in \mathcal{B}^n : B \subset A\}$

E IL RISULTATO SOPRA VALE

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

5) COMBINANDO (1) E (4), OGNI COMPOSIZIONE DI FUNZIONI MISURABILI CON FUNZIONI "USUALI" È MISURABILE

$f^n \quad n \geq 1 \qquad f^{\alpha} \quad (\text{SE } P(f>0)=1)$

$\log(f) \quad (\text{SE } P(f>0)=1)$

$\sqrt{f} \quad (\text{SE } P(f\geq 0)=1)$

e^f

- - - -

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

6) $\Omega' = \mathbb{R}^m \qquad \mathcal{F}' = \mathcal{B}^m$

$$f : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}^m}{\mathbb{R}^m}$$

$$f(\omega) = \begin{bmatrix} f_1(\omega) \\ \vdots \\ f_m(\omega) \end{bmatrix}$$

f È $\mathcal{F}/\mathcal{B}^m$ - MISURABILE

SE E SOLO SE OGNI

$$f_i : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \longrightarrow \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}}$$

È $\mathcal{F}/\mathcal{B}$ - MISURABILE

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

σ-ALGEBRA GENERATA DA UNA FUNZIONE

$f : \Omega \longrightarrow \Omega'$

$\mathcal{F}'$ σ-ALGEBRA IN Ω'

$\sigma(f) = \{ f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{F}' \}$

= PIÙ PICCOLA σ-ALGEBRA $\mathcal{F}$ SU Ω TALE CHE f È $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-MISURABILE

(≡ INTERSEZIONE DI TUTTE LE σ-ALGEBRE $\mathcal{F}$ SU Ω TALI CHE f È $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-MISURABILE)

QUINDI
* $\sigma(f)$ È UNA σ-ALGEBRA
* f È $\sigma(f)/\mathcal{F}'$-MISURABILE
* SE $\mathcal{F}$ È UNA σ-ALGEBRA TALE CHE f È $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-MISURABILE ALLORA $\sigma(f) \subset \mathcal{F}$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ FAMIGLIA DI FUNZIONI

$$f_\alpha : \Omega \longrightarrow \underset{\mathcal{F}'}{\Omega'}$$

$\sigma(f_\alpha, \alpha \in I)$ = INTERSEZIONE DELLE σ- ALGEBRE $\mathcal{F}$ SU Ω CHE RENDONO TUTTE LE f_α $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-MISURABILI

$$= \sigma\left(\{ f_\alpha^{-1}(A'),\ A' \in \mathcal{F}',\ \alpha \in I \}\right)$$

QUINDI

* $\sigma(f_\alpha, \alpha \in I)$ È UNA σ- ALGEBRA

* f_α È $\sigma(f_\alpha, \alpha \in I)/\mathcal{F}'$ -MISURABILE PER OGNI α

* SE $\mathcal{F}$ È UNA σ- ALGEBRA SU Ω TALE CHE f_α È $\mathcal{F}/\mathcal{F}'$-MIS. PER OGNI α, ALLORA
$$\sigma(f_\alpha, \alpha \in I) \subset \mathcal{F}$$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\quad X : \underset{\mathcal{F}}{\Omega} \to \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}}$

$$\sigma(X) = \{ X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B} \}$$

$$= \{ \{ X \in B \} : B \in \mathcal{B} \}$$

= INFORMAZIONE ~~~~ DATA DALL'OSSERVAZIONE DEL VALORE PRESO DA X

$X_\alpha : \Omega \to \mathbb{R}$

$\alpha \in I$

$$\sigma(X_\alpha, \alpha \in I) = \sigma\left(\{ X_\alpha^{-1}(B), \ \alpha \in I, \ B \in \mathcal{B} \} \right)$$

= INFORMAZIONE DATA DALL'OSSERVAZIONE ~~~~ DEI VALORI PRESI DA X_α, $\alpha \in I$

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$\mathcal{F} = \sigma(\mathbb{P})$

$\mathbb{P} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n \ldots\}$ PARTIZIONE NUMERABILE O FINITA

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

X È $\mathcal{F}$-MISURABILE SE E SOLO SE X È COSTANTE SU OGNUNO DEGLI A_i

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

ESEMPI: * $\sigma(1_A) = \sigma(\{A\}) = \{\phi, A, \overline{A}^c, \Omega\}$

$= \sigma(\underbrace{\{A, \overline{A}\}}_{\text{PARTIZIONE}})$

* X SEMPLICE CON VALORI $x_1, \ldots, x_n$

$$\sigma(X) = \sigma(\{\underbrace{\{X = x_1\}, \ldots, \{X = x_n\}}_{\text{PARTIZIONE}}\})$$

$$= \{X \in B,\ B \in \mathcal{B}\}$$

SE Y È $\sigma(X)$-MISURABILE, ALLORA

Y È COSTANTE SU $\{X = x_j\}$

QUINDI SE $\omega_1, \omega_2 \in \{X = x_j\}$

ALLORA $Y(\omega_1) = Y(\omega_2)$

QUINDI DIPENDO SOLO DA x_j

$\Rightarrow$ Y È FUNZIONE DI X

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$$X = [X_1 - X_n] : \Omega \to \mathbb{R}^n$$

VETTORE DI V.A.

$$\sigma(X) \subset \mathcal{F}$$

$$Y = [Y_1 - Y_m] : \Omega \to \mathbb{R}^m$$

ALLORA Y È $\sigma(X)$-MISURABILE

SE E SOLO SE ESISTE

$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ MISURABILE

TALE CHE

$$Y = g(X) \qquad (Y_j = g_j(X_1 - X_n))$$

QUINDI Y È $\sigma(X)$-MISURABILE VUOL DIRE CHE Y SI PUÒ CALCOLARE PARTENDO DAL VALORE DI X ($\Leftrightarrow \sigma(Y) \subset \sigma(X)$!)

VARIABILI ALEATORIE E MISURABILITÀ

ESEMPIO: LANCIO DI DUE DADI

X_1, X_2 RISULTATI

$Z = X_1 + X_2 \qquad U = MIN(X_1, X_2)$

$W = X_1 \cdot X_2 \qquad V = MAX(X_1, X_2)$

VERO O FALSO?

$\sigma(X_1, X_2) = \sigma(Z, W)$

$\sigma(X_1, X_2) = \sigma(U, V)$

$\sigma(Z, W) = \sigma(U, V)$

$\sigma(Z, U) = \sigma(Z, V)$

$\sigma(X_1 - X_2) = \sigma(V - U, 1_{\{X_1 > X_2\}})$

$\sigma(U, X_1) = \sigma(V, X_2)$

$\sigma(Z) \cap \sigma(W) = \{\emptyset, \Omega\}$

$\sigma(U) \cap \sigma(V) = \{\emptyset, \Omega\}$