Analisi Matematica II

Appunti delle lezioni tenute dal Prof. A. Fonda - Parte III

Università di Trieste, CdL Ingegneria, a.a. 2021/2022

1 Teoria dell'integrale - il caso $N = 1$

In tutta questa sezione indicheremo con I un intervallo compatto di $\mathbb{R}$.

1.1 P-partizioni e somme di Riemann

Incominciamo con l'introdurre la nozione di P-partizione dell'intervallo I.

Definizione 1 *Una* **P-partizione** *dell'intervallo* $I = [a, b]$ *è un insieme*

$$\Pi = \{(x_1, [a_0, a_1]), (x_2, [a_1, a_2]), \ldots, (x_m, [a_{m-1}, a_m])\}$$

i cui elementi appaiono come coppie $(x_j, [a_{j-1}, a_j])$, *dove* $[a_{j-1}, a_j]$ *è un sottointervallo di* I *e* x_j *è un punto in esso. Precisamente, si ha*

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1} < a_m = b$$

e, per ogni $1 \leq j \leq m$,

$$x_j \in [a_{j-1}, a_j].$$

Consideriamo ora una funzione f definita sull'intervallo I. Ad ogni P-partizione dell'intervallo I possiamo associare un numero reale, nel modo seguente.

Definizione 2 *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione e*

$$\Pi = \{(x_1, [a_0, a_1]), (x_2, [a_1, a_2]), \ldots, (x_m, [a_{m-1}, a_m])\}$$

una P-partizione di I. *Si chiama* **somma di Riemann** *associata a* I, f *e* Π *il numero reale* $S(I, f, \Pi)$ *definito da*

$$S(I, f, \Pi) = \sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) \,.$$

Ci chiediamo ora se, prendendo delle P-partizioni via via più fini, le somme di Riemann ad esse associate convergano ad un qualche valore. Nel caso che ciò avvenga per una funzione positiva f, tale valore può essere visualizzato come la misura dell'area della regione del piano cartesiano compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse. Per poter analizzare la questione, dobbiamo specificare cosa si intende per "finezza" di una P-partizione.

1.2 La nozione di $\delta-$finezza

Introduciamo una nozione di finezza della P-partizione Π sopra definita. Per brevità, chiameremo **calibro** su I ogni funzione $\delta : I \to \mathbb{R}$ tale che $\delta(x) > 0$ per ogni $x \in I$. Una tale funzione ci servirà per avere un controllo sull'ampiezza dei vari sottointervalli determinati dai punti della P-partizione.

Definizione 3 *Dato che sia un calibro δ su I, diremo che la P-partizione Π sopra introdotta è $\delta-$**fine** se, per ogni $1 \le j \le m$,*

$$x_j - a_{j-1} \le \delta(x_j) \quad e \quad a_j - x_j \le \delta(x_j)\,.$$

Equivalentemente, abbiamo

$$[a_{j-1}, a_j] \subset [x_j - \delta(x_j), x_j + \delta(x_j)]\,,$$

o anche

$$x_j - \delta(x_j) \le a_{j-1} \le x_j \le a_j \le x_j + \delta(x_j)\,.$$

Mostreremo ora che è sempre possibile trovare una P-partizione $\delta-$fine dell'intervallo I, qualunque sia il calibro δ. Nel teorema che segue, dovuto a P. Cousin, la compattezza dell'intervallo I gioca un ruolo essenziale.

Teorema 4 *Dato un intervallo compatto I, per ogni calibro δ su I esiste una P-partizione $\delta-$fine di I.*

Dimostrazione. Ragioneremo per assurdo. Supponiamo che esista un calibro δ su I per il quale non sia possibile trovare alcuna P-partizione $\delta-$fine di I. Dividiamo l'intervallo I in due sottointervalli uguali, aventi il punto di mezzo come estremo comune. Allora almeno uno dei due sottointervalli non ha alcuna P-partizione $\delta-$fine. Scegliamolo, e dividiamolo a sua volta in due sottointervalli uguali. Continuando in questo modo, ci costruiamo una successione $(I_n)_n$ di sottointervalli imbottigliati la cui lunghezza tende a zero, ognuno dei quali non possiede alcuna P-partizione $\delta-$fine. Per il Teorema di Cantor, esiste uno ed un solo punto $c \in I$ che appartiene a tutti questi intervalli. È inoltre chiaro che da un certo n in poi, tutti gli I_n saranno contenuti in $[c - \delta(c), c + \delta(c)]$. Prendiamo uno di questi: sia esso $I_{\bar{n}}$. Allora l'insieme $\Pi = \{(c, I_{\bar{n}})\}$, il cui unico elemento è la coppia $(c, I_{\bar{n}})$, è una P-partizione $\delta-$fine di $I_{\bar{n}}$, in contraddizione con quanto sopra. ■

1.3 Funzioni integrabili su un intervallo compatto

Consideriamo una funzione f definita sull'intervallo I. Siamo ora in grado di definire cosa intendiamo per convergenza delle somme di Riemann qualora le P-partizioni diventino via via più fini. La seguente definizione è dovuta a R. Henstock e J. Kurzweil.

Definizione 5 *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice* **integrabile** *su I se esiste un numero reale A avente la seguente proprietà: comunque scelto $\varepsilon > 0$, si può trovare un calibro δ su I tale che, per ogni P-partizione $\delta-$fine Π di I, si abbia*

$$|S(I, f, \Pi) - A| \leq \varepsilon \,.$$

Dimostriamo che esiste al più un $A \in \mathbb{R}$ che verifica le condizioni della definizione. Se ce ne fosse un secondo, chiamiamolo A', avremmo che per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbero due calibri δ e δ' su I associati rispettivamente a A e a A' dalla definizione. Definiamo il calibro δ'' :

$$\delta''(x) = \min\{\delta(x), \delta'(x)\} \,.$$

Presa una P-partizione $\delta''-$fine Π di I, si ha che Π è sia $\delta-$fine che $\delta'-$fine, e perciò

$$|A - A'| \leq |A - S(I, f, \Pi)| + |S(I, f, \Pi) - A'| \leq 2\varepsilon \,.$$

Siccome ciò vale per ogni $\varepsilon > 0$, si deve necessariamente avere $A = A'$.

Se $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione integrabile su I, l'unico elemento $A \in \mathbb{R}$ che verifica le condizioni della definizione si chiama l'**integrale** di f su I e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\int_I f \,, \quad \int_a^b f \,, \quad \int_I f(x)\, dx \,, \quad \int_a^b f(x)\, dx \,.$$

La presenza della lettera x nella notazione qui introdotta non ha importanza in sè. Essa potrebbe essere rimpiazzata da una qualunque altra lettera u, α, o da un qualunque altro simbolo, purché non abbia già un altro significato.

Si pone inoltre, per motivi che saranno chiariti più avanti,

$$\int_b^a f = -\int_a^b f \quad \text{e} \quad \int_a^a f = 0 \,.$$

Definizione 6 *Diremo che una funzione integrabile su I è ivi* **R-integrabile** *(o integrabile secondo Riemann), se tra i possibili calibri δ che verificano le condizioni della definizione di integrabilità se ne può sempre prendere uno costante su tutto I.*

1.4 Proprietà elementari dell'integrale

Proposizione 7 *Se f e g sono integrabili su I, allora $f + g$ è integrabile su I e si ha:*

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g \,.$$

Proposizione 8 *Se f è integrabile su I e $\alpha \in \mathbb{R}$, allora αf è integrabile su I e si ha:*

$$\int_I (\alpha f) = \alpha \left(\int_I f \right) .$$

Abbiamo così dimostrato che l'insieme delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale, e che l'integrale è una funzione lineare su di esso.

Proposizione 9 *Se f e g sono integrabili su I e $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in I$, allora*

$$\int_I f \leq \int_I g\,.$$

Corollario 10 *Se f e $|f|$ sono integrabili su I, allora*

$$\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|\,.$$

<u>Dimostrazione</u>. Applicando il corollario precedente alle disuguaglianze

$$-|f| \leq f \leq |f|\,,$$

si ha

$$-\int_I |f| \leq \int_I f \leq \int_I |f|\,,$$

da cui la tesi. ■

Proposizione 11 *Siano dati tre punti $a < c < b$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è integrabile su $[a,b]$ se e solo se lo è sia su $[a,c]$ che su $[c,b]$. In tal caso, si ha*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

È facile vedere come dall'enunciato precedente segua che se una funzione è integrabile su un intervallo I, lo è anche su ogni suo sottointervallo. Inoltre, si ha il seguente

Corollario 12 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ è integrabile su I, presi comunque tre punti u, v, w in I si ha*

$$\int_u^w f = \int_u^v f + \int_v^w f\,.$$

1.5 Il Teorema Fondamentale

Introduciamo il concetto di funzione primitiva di una data funzione.

Definizione 13 *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice* **primitivabile** *su I se esiste una funzione derivabile $F : I \to \mathbb{R}$ tale che $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$. Una tale funzione F si chiama* **primitiva** *di f su I.*

Il Teorema Fondamentale stabilisce che tutte le funzioni primitivabili sono integrabili, e che il loro integrale si può calcolare facilmente, nota che sia una loro primitiva.

Teorema 14 *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione primitivabile su* $[a,b]$ *e sia* F *una qualunque sua primitiva. Allora* f *è integrabile su* $[a,b]$ *e*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

Talvolta è comodo indicare la differenza $F(b) - F(a)$ con i simboli

$$[F]_a^b\,, \quad [F(x)]_{x=a}^{x=b}\,,$$

o con varianti di questi, come ad esempio $[F(x)]_a^b$, qualora non ci siano ambiguità.

Il fatto che la differenza $F(b) - F(a)$ non dipende dalla primitiva in questione è spiegato dalla seguente proposizione.

Proposizione 15 *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione primitivabile, e sia* F *una sua primitiva. Allora una funzione* $G : I \to \mathbb{R}$ *è primitiva di* f *se e solo se* $F - G$ *è una funzione costante su* I.

Si può dimostrare che ogni funzione continua $f : I \to \mathbb{R}$ è primitivabile.

2 Integrazione di funzioni di più variabili

In questa sezione estenderemo la teoria sviluppata nel capitolo precedente per poter trattare funzioni di più variabili definite su sottoinsiemi di $\mathbb{R}^N$, a valori in $\mathbb{R}$. Per semplicità di esposizione, ci limiteremo spesso al caso $N = 2$. Non sarà difficile al lettore estendere la trattazione al caso di una dimensione N generica.

2.1 L'integrabilità sui rettangoli

Incominciamo con il considerare il caso di funzioni definite su rettangoli. Un **rettangolo** di $\mathbb{R}^N$ è un insieme del tipo $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_N, b_N]$. Questa dicitura è certamente familiare nel caso $N = 2$. Se $N = 1$, un rettangolo risulta essere un intervallo chiuso e limitato. Se $N = 3$, si usa anche la dicitura di "parallelepipedo rettangolo". Nell'esposizione che segue, ci concentriamo per semplicità sul caso bidimensionale. Il caso generale è del tutto simile e non presenta maggiori difficoltà, tranne che per le notazioni.

Consideriamo un rettangolo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$. Definiamo la misura di I :

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\,.$$

Diremo che due rettangoli sono non sovrapposti se i loro interni sono disgiunti.

Una **P-partizione** del rettangolo I è un insieme

$$\Pi = \{(\boldsymbol{x}_1, I_1), (\boldsymbol{x}_2, I_2), \ldots, (\boldsymbol{x}_m, I_m)\},$$

dove gli I_j sono dei rettangoli a due a due non sovrapposti la cui unione è I e, per ogni j, $\boldsymbol{x}_j = (x_j, y_j)$ è un punto in I_j.

Consideriamo ora una funzione f definita sul rettangolo I, a valori in $\mathbb{R}$, e sia $\Pi = \{(\boldsymbol{x}_j, I_j) : j = 1, \ldots, m\}$ una P-partizione di I. Si chiama **somma di Riemann** associata a I, f e Π il numero reale $S(I, f, \Pi)$ definito da

$$S(I, f, \Pi) = \sum_{j=1}^{m} f(\boldsymbol{x}_j)\mu(I_j).$$

Nel caso di una funzione f positiva, questo numero è la somma delle misure dei volumi dei parallelepipedi aventi come base I_j e come altezza $[0, f(\boldsymbol{x}_j)]$.

Introduciamo una nozione di finezza della P-partizione Π sopra definita. Chiameremo **calibro** su I ogni funzione $\delta : I \to \mathbb{R}$ tale che $\delta(\boldsymbol{x}) > 0$ per ogni $\boldsymbol{x} \in I$. Dato che sia un calibro δ su I, diremo che la P-partizione Π sopra introdotta è $\delta-$**fine** se, per ogni $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$,

$$I_j \subset [x_j - \delta(x_j, y_j), x_j + \delta(x_j, y_j)] \times [y_j - \delta(x_j, y_j), y_j + \delta(x_j, y_j)].$$

In seguito, dati $\boldsymbol{x} = (x, y) \in I$ e $r > 0$, per abbreviare le notazioni scriveremo

$$B[\boldsymbol{x}, r] = [x - r, x + r] \times [y - r, y + r];$$

la P-partizione Π sarà quindi $\delta-$fine se, per ogni $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $I_j \subset B[\boldsymbol{x}_j, \delta(\boldsymbol{x}_j)]$.

Come nel caso unidimensionale, si può dimostrare che per ogni calibro δ su I esiste una P-partizione $\delta-$fine di I. La definizione che segue è identica a quella vista nel caso $N = 1$.

Definizione 16 *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice* **integrabile** *sul rettangolo I se esiste un numero reale A avente la seguente proprietà: comunque scelto $\varepsilon > 0$, si può trovare un calibro δ su I tale che, per ogni P-partizione $\delta-$fine Π di I, si abbia*

$$|S(I, f, \Pi) - A| \leq \varepsilon.$$

Elenchiamo ora brevemente tutte le proprietà che si possono ottenere a partire dalla definizione data in modo del tutto simile a quanto fatto nel caso di una funzione di una variabile.

Esiste al più un $A \in \mathbb{R}$ che verifica le condizioni della definizione. Tale numero reale si chiama l'**integrale** di f su I e si indica con uno dei seguenti simboli:

$$\int_I f, \quad \int_I f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}.$$

L'insieme delle funzioni integrabili è uno spazio vettoriale, e l'integrale è una funzione lineare su di esso:

$$\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g\,, \qquad \int_I (cf) = c\int_I f$$

($c \in \mathbb{R}$); esso conserva l'ordine:

$$f \leq g \;\Rightarrow\; \int_I f \leq \int_I g\,.$$

Inoltre, si ha la seguente versione del teorema di **additività su sottorettangoli**.

Teorema 17 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ e siano $K_1, K_2, \dots, K_l$ dei sottorettangoli di I a due a due non sovrapposti, la cui unione è I. Allora f è integrabile su I se e solo se lo è su ognuno dei K_i. In tal caso, si ha*

$$\int_I f = \sum_{i=1}^{l} \int_{K_i} f\,.$$

In particolare, se una funzione è integrabile su un rettangolo, lo è anche su ogni sottorettangolo.

Diremo che una funzione integrabile su I è **R-integrabile** (o integrabile secondo Riemann), se tra i possibili calibri δ che verificano le condizioni della definizione di integrabilità se ne può sempre prendere uno costante su tutto I. L'insieme delle funzioni R-integrabili è un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni integrabili e contiene il sottospazio delle funzioni continue.

Diremo che una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, integrabile su I, è ivi **L-integrabile** (o integrabile secondo Lebesgue), se $|f|$ risulta anch'essa integrabile su I. Le funzioni L-integrabili costituiscono un sottospazio vettoriale dello spazio delle funzioni integrabili e contiene il sottospazio delle funzioni R-integrabili. In generale, però, non è detto che una funzione primitivabile $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sia L-integrabile.

Dato un insieme limitato E e una funzione f il cui dominio contiene E, definiamo la funzione f_E come segue:

$$f_E(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} f(\boldsymbol{x}) & \text{se } \boldsymbol{x} \in E\,, \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{x} \notin E\,. \end{cases}$$

Possiamo dimostrare la seguente

Proposizione 18 *Siano I_1 e I_2 due rettangoli contenenti l'insieme E. Allora f_E è integrabile su I_1 se e solo se lo è su I_2. In tal caso, si ha che $\int_{I_1} f_E = \int_{I_2} f_E$.*

Siamo così portati alla seguente definizione.

Definizione 19 *Dato un insieme limitato E, diremo che la funzione $f : E \to \mathbb{R}$ è integrabile su E se esiste un rettangolo I contenente l'insieme E sul quale f_E risulta integrabile. In tal caso, si pone*

$$\int_E f = \int_I f_E \,.$$

Nel caso in cui f sia integrabile su E secondo la definizione ora data, si ha che f_E risulta integrabile su ogni rettangolo contenente l'insieme E, e inoltre l'integrale di f_E su ciascuno di tali rettangoli è un numero che rimane invariato.

Le funzioni continue sono R-integrabili su ogni rettangolo I. Vale inoltre la seguente proprietà.

Teorema 20 *Sia E un insieme compatto e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è L-integrabile su E.*

Con la definizione data, **si estendono facilmente tutte le proprietà dell'integrale viste finora**. *Fa però eccezione l'additività*, in quanto non si può affermare in generale che una funzione integrabile su un insieme limitato lo sia anche sui suoi sottoinsiemi. Vale però il seguente

Teorema 21 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione L-integrabile su un insieme limitato E. Allora f è L-integrabile su ogni sottoinsieme misurabile di E.*

3 La misura di un insieme limitato

Definizione 22 *Un insieme limitato E si dice* **misurabile** *se la funzione costante 1 è integrabile su E. In tal caso, il numero $\int_E 1$ viene detto* **misura** *di E e si indica con $\mu(E)$.*

La misura di un insieme misurabile è quindi un numero non negativo; per convenzione, la misura dell'insieme vuoto vale 0. Nel caso di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$, la misura si dice anche **area** dell'insieme. Se $E = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ è un rettangolo, si vede facilmente che

$$\mu(E) = \int_E 1 = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\,,$$

per cui la notazione è compatibile con quella già introdotta per i rettangoli. Per un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$, la misura si dice anche **volume** dell'insieme.

Purtroppo, non tutti gli insiemi sono misurabili. Si possono in effetti costruire degli insiemi non misurabili, con conseguenze talvolta imbarazzanti. Nel seguito faremo attenzione a che gli insiemi considerati siano sempre misurabili.

Vediamo alcune proprietà della misura. È utile introdurre la funzione caratteristica di un insieme E, definita da

$$\chi_E(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{se } \boldsymbol{x} \in E\,, \\ 0 & \text{se } \boldsymbol{x} \notin E\,. \end{cases}$$

Se I è un rettangolo contenente l'insieme E, si ha quindi

$$\mu(E) = \int_I \chi_E\,.$$

Proposizione 23 *Siano A e B due insiemi limitati misurabili. Valgono le seguenti proprietà:*
(a) Se $A \subset B$, allora $B \setminus A$ è misurabile e

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)\,;$$

in particolare, $\mu(A) \leq \mu(B)$.
(b) $A \cup B$ e $A \cap B$ sono misurabili e

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)\,;$$

in particolare, se A e B sono disgiunti, allora $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Dimostrazione. Se $A \subset B$, si ha $\chi_{B\setminus A} = \chi_B - \chi_A$, e la proprietà (a) segue integrando.

Essendo $\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$ e $\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\}$, si ha che $\chi_{A\cup B}$ e $\chi_{A\cap B}$ sono integrabili. Inoltre,

$$\chi_{A\cup B} + \chi_{A\cap B} = \chi_A + \chi_B\,,$$

e integrando si ha la (b). ■

Chiaramente, si ha che l'insieme vuoto è misurabile e $\mu(\emptyset) = 0$. Inoltre, si può dimostrare che ogni insieme aperto e limitato è misurabile, così come ogni insieme chiuso e limitato.

Proposizione 24 *Sia E un insieme limitato misurabile e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata a valori non negativi. Sia G_f l'insieme così definito:*

$$G_f = \{(\boldsymbol{x}, t) \in E \times \mathbb{R} : 0 \leq t \leq f(\boldsymbol{x})\}\,.$$

Allora f è integrabile su E se e solo se G_f è misurabile, nel qual caso si ha:

$$\mu(G_f) = \int_E f\,.$$

4 Insiemi trascurabili

Definizione 25 *Diremo che un insieme limitato è* **trascurabile** *se è misurabile e la sua misura è nulla.*

Nel seguito di questa sezione supporremo sempre che E sia un sottoinsieme limitato di $\mathbb{R}^N$. Vediamo come si possono caratterizzare gli insiemi limitati trascurabili. Nella seguente proposizione, la dicitura tra parentesi quadre può essere omessa.

Proposizione 26 *Sia E un insieme limitato. Si ha che E è trascurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una famiglia finita o numerabile (J_k) di rettangoli [a due a due non sovrapposti] tali che:*

$$E \subset \bigcup_k J_k \,, \qquad \sum_k \mu(J_k) \leq \varepsilon \,.$$

Ogni insieme costituito da un unico punto è trascurabile. Ma sono trascurabili anche tutti gli insiemi finiti o numerabili limitati. Il lato di un rettangolo in $\mathbb{R}^2$ è un insieme trascurabile.

Definizione 27 *Sia E un insieme limitato. Una proposizione si dice essere vera* **quasi ovunque** *su E (o per quasi ogni punto di E) se l'insieme dei punti in cui non è vera è trascurabile.*

Teorema 28 *Se due funzioni f e g, definite sull'insieme limitato E, coincidono quasi ovunque, allora f è integrabile su E se e solo se lo è g. In tal caso, $\int_E f = \int_E g$.*

Quest'ultimo risultato ci permette di considerare delle funzioni definite quasi ovunque, e definirne l'integrale.

Definizione 29 *Una funzione f, definita quasi ovunque su un insoeme limitato E, a valori reali, si dice integrabile su E se si può estendere ad una funzione $g : E \to \mathbb{R}$, integrabile su E. In tal caso, si pone $\int_E f = \int_E g$.*

Si può vedere che **tutte le proprietà e i teoremi visti finora continuano a valere per tali funzioni**.

Risulta interessante la seguente caratterizzazione delle funzioni R-integrabili.

Teorema 30 *Sia E un insieme limitato. Una funzione $f : E \to \mathbb{R}$ è R-integrabile se e solo se è limitata e continua quasi ovunque.*

5 La formula di riduzione

Il seguente teorema, dovuto a G. Fubini, permette di calcolare l'integrale di una funzione integrabile di due variabili effettuando due integrazioni di funzioni di una variabile.

Teorema 31 *Sia* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile sul rettangolo* $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. *Allora:*
(i) per quasi ogni $x \in [a_1, b_1]$, *la funzione* $f(x, \cdot)$ *è integrabile su* $[a_2, b_2]$;
(ii) la funzione $\int_{a_2}^{b_2} f(\cdot, y)\, dy$, *definita quasi ovunque su* $[a_1, b_1]$, *è ivi integrabile;*
(iii) si ha:

$$\int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy \right) dx\,.$$

Dimostrazione. Per dare un'idea della dimostrazione, considereremo il caso semplificato in cui $f : I \to \mathbb{R}$ è continua. Essendo $f(x, \cdot) : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}$ continua, essa è integrabile; definiamo

$$F(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\, dy\,.$$

Vogliamo dimostrare che F è integrabile su $[a_1, b_1]$ e che

$$\int_{a_1}^{b_1} F = \int_I f\,.$$

Sia $\varepsilon > 0$ fissato. Per l'integrabilità di f su I, esiste un calibro δ su I tale che, per ogni P-partizione $\delta-$fine Π di I,

$$\left| S(I, f, \Pi) - \int_I f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Associamo a ciascun $x \in [a_1, b_1]$ una P-partizione $\delta(x, \cdot)-$fine Π_2^x di $[a_2, b_2]$ tale che

$$|S([a_2, b_2], f(x, \cdot), \Pi_2^x) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2(b_1 - a_1)}$$

(ciò è possibile poichè $f(x, \cdot)$ è integrabile su $[a_2, b_2]$ con integrale $F(x)$). Scriviamo le P-partizioni così determinate:

$$\Pi_2^x = \{(y_j^x, K_j^x) : j = 1, \ldots, m^x\}\,.$$

Definiamo un calibro δ_1 su $[a_1, b_1]$, ponendo

$$\delta_1(x) = \min\{\delta(x, y_1^x), \ldots, \delta(x, y_{m^x}^x)\}\,.$$

Consideriamo ora una P-partizione δ_1-fine di $[a_1, b_1]$:

$$\Pi_1 = \{(x_i, J_i) : i = 1, \ldots, n\}\,,$$

e costruiamo, a partire da Π_1, una P-partizione $\delta-$fine di I :

$$\Pi = \{((x_i, y_j^{x_i}), J_i \times K_j^{x_i}) : i = 1, \ldots, n \ , \ j = 1, \ldots, m^{x_i}\} .$$

Abbiamo le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}
&\left| S([a_1, b_1], F, \Pi_1) - \int_I f \right| \leq \\
&\leq |S([a_1, b_1], F, \Pi_1) - S(I, f, \Pi)| + \left| S(I, f, \Pi) - \int_I f \right| \\
&\leq \left| \sum_{i=1}^{n} F(x_i)\mu(J_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m^{x_i}} f(x_i, y_j^{x_i})\mu(J_i \times K_j^{x_i}) \right| + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \left| F(x_i) - \sum_{j=1}^{m^{x_i}} f(x_i, y_j^{x_i})\mu(K_j^{x_i}) \right| \mu(J_i) + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{2(b_1 - a_1)} \mu(J_i) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .
\end{aligned}$$

Ciò dimostra che F è integrabile e

$$\int_{a_1}^{b_1} F = \int_I f .$$

La dimostrazione è quindi completa. ■

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x, y) = x^2 \sin y$ sul rettangolo $I = [-1, 1] \times [0, \pi]$. Essendo f continua su un compatto, è ivi integrabile, per cui si ha:

$$\begin{aligned}
\int_I f &= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\pi} x^2 \sin y \, dy \right) dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 [-\cos y]_0^{\pi} \, dx = 2 \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = 2 \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3} .
\end{aligned}$$

Naturalmente, vale anche la seguente versione del Teorema di Fubini, simmetrica della precedente.

Teorema 32 *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile sul rettangolo $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Allora:*
(i) per quasi ogni $y \in [a_2, b_2]$, la funzione $f(\cdot, y)$ è integrabile su $[a_1, b_1]$;
(ii) la funzione $\int_{a_1}^{b_1} f(x, \cdot) \, dx$, definita quasi ovunque su $[a_2, b_2]$, è ivi integrabile;
(iii) si ha:

$$\int_I f = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) \, dx \right) dy .$$

Come immediata conseguenza, si ha che, se f è integrabile su $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, allora

$$\int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\, dx \right) dy\,.$$

In altri termini, se non vale l'uguaglianza ora scritta, la funzione f non è integrabile su I.

Esempi. Consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sul rettangolo $I = [0,1] \times [0,1]$. Se $x \neq 0$, si ha

$$\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy = \left[\frac{y}{x^2+y^2} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{x^2+1}\,,$$

per cui

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right) dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}\,.$$

Analogamente, si vede che

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}\,,$$

e se ne deduce che f non è integrabile su I.

Come ulteriore esempio, consideriamo la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

sul rettangolo $I = [-1,1] \times [-1,1]$. In questo caso, se $x \neq 0$, si ha

$$\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy = \left[\frac{-x}{2(x^2+y^2)} \right]_{y=-1}^{y=1} = 0\,,$$

per cui

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy \right) dx = 0\,.$$

Analogamente, si vede che

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dx \right) dy = 0\,.$$

Ciononostante, non si può concludere che f sia integrabile su I. In realtà non lo è proprio. Infatti, se lo fosse, dovrebbe essere integrabile anche sui sottorettangoli, e in particolare su $[0,1] \times [0,1]$. Ma, se $x \neq 0$, si ha

$$\int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\, dy = \left[\frac{-x}{2(x^2+y^2)} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{1}{2x(x^2+1)}\,,$$

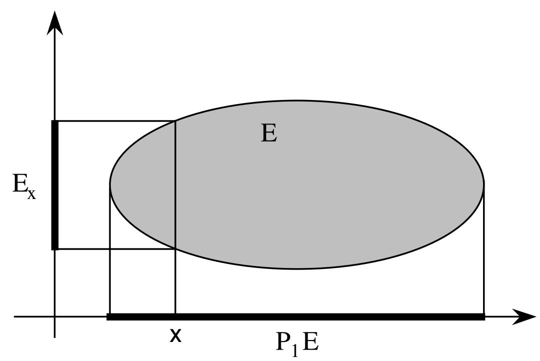
che non è integrabile rispetto a x su $[0,1]$.

Se la funzione f è definita in un sottoinsieme limitato E di $\mathbb{R}^2$, si può applicare il teorema di riduzione alla funzione f_E. Sia $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ un rettangolo contenente E. Definiamo le **sezioni** di E :

$$E_x = \{y \in [a_2, b_2] : (x, y) \in E\}\,,\ E_y = \{x \in [a_1, b_1] : (x, y) \in E\}\,,$$

e le **proiezioni** di E :

$$P_1E = \{x \in [a_1, b_1] : E_x \neq \emptyset\}\,,\ P_2E = \{y \in [a_2, b_2] : E_y \neq \emptyset\}\,.$$



Possiamo allora riformulare il teorema nella forma seguente.

Teorema 33 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile sull'insieme limitato E. Allora:*
(i) per quasi ogni $x \in P_1E$, la funzione $f_E(x, \cdot)$ è integrabile sull'insieme E_x;
(ii) la funzione $x \mapsto \int_{E_x} f(x, y)\, dy$, definita quasi ovunque su P_1E, è ivi integrabile;
(iii) si ha:

$$\int_E f = \int_{P_1E} \left(\int_{E_x} f(x, y)\, dy \right) dx\,.$$

Analogamente, la funzione $y \mapsto \int_{E_y} f(x, y)\, dx$, definita quasi ovunque su P_2E, è ivi integrabile, e si ha:

$$\int_E f = \int_{P_2E} \left(\int_{E_y} f(x, y)\, dx \right) dy\,.$$

Esempio. Consideriamo la funzione $f(x, y) = |xy|$ sull'insieme

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, -x^2 \leq y \leq x^2\}\,.$$

Essendo f continua ed E compatto, si può applicare il teorema; si ha che $P_1E = [0, 1]$ e, per ogni $x \in P_1E$, $E_x = [-x^2, x^2]$. Quindi:

$$\int_E f = \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} |xy|\, dy \right) dx$$
$$= \int_0^1 2 \left[x\frac{y^2}{2} \right]_0^{x^2} dx = \int_0^1 x^5\, dx = \left[\frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{6}\,.$$

Come corollario, otteniamo un metodo per calcolare la misura di un insieme limitato misurabile.

Corollario 34 *Se $E \subset \mathbb{R}^2$ è un insieme limitato misurabile, allora:*
(i) per quasi ogni $x \in P_1 E$, l'insieme E_x è misurabile;
(ii) la funzione $x \mapsto \mu(E_x)$, definita quasi ovunque su $P_1 E$, è ivi integrabile;
(iii) si ha:

$$\mu(E) = \int_{P_1 E} \mu(E_x)\, dx\,.$$

Analogamente, la funzione $y \mapsto \mu(E_y)$, definita quasi ovunque su $P_2 E$, è ivi integrabile, e si ha:

$$\mu(E) = \int_{P_2 E} \mu(E_y)\, dy\,.$$

Nel caso di funzioni di più di due variabili, valgono risultati analoghi ai precedenti, con le medesime dimostrazioni. Separate le variabili in due gruppi, e chiamato x il primo gruppo di variabili e y il secondo, valgono esattamente le stesse formule scritte sopra. Inoltre, iterando il procedimento di riduzione, si possono dimostrare, per una funzione di N variabili integrabile su un rettangolo

$$I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_N, b_N]\,,$$

formule del tipo

$$\int_I f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} \left(\dots \int_{a_N}^{b_N} f(x_1, x_2, \dots, x_N)\, dx_N \ \dots \right) dx_2 \right) dx_1\,.$$

Esempi. 1) Calcoliamo l'area di un cerchio centrato nell'origine di raggio $r > 0$,

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\}\,.$$

Abbiamo che $P_1 E = [-r, r]$ e $E_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}]$, per ogni $x \in [-r, r]$. Quindi,

$$\mu(E) = \int_{-r}^{r} 2\sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r^2 \cos^2 u\, du = \pi r^2.$$

(Abbiamo operato la sostituzione $u = \arcsin(x/r)$, ossia $x = r \sin u$.)

2) Calcoliamo il volume di una palla tridimensionale centrata nell'origine di raggio $r > 0$,

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le r^2\}\,.$$

Possiamo procedere in due modi, a seconda di come raccogliamo le variabili.

<u>Primo modo</u>. Scriviamo $(x, y, z) = (x, (y, z))$. Abbiamo che $P_1 E = [-r, r]$ e

$$E_x = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \le r^2 - x^2\}\,, \qquad \text{per ogni } x \in [-r, r]\,.$$

Quindi, E_x è un cerchio di raggio $\sqrt{r^2 - x^2}$, la cui area è $\mu(E_x) = \pi(r^2 - x^2)$, e possiamo calcolare

$$\mu(E) = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\, dx = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

<u>Secondo modo</u>. Scriviamo $(x, y, z) = ((x, y), z)$. Allora

$$P_1 E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le r^2\},$$

mentre

$$E_{(x,y)} = \left[-\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} \right], \text{ per ogni } (x, y) \in P_1 E\,.$$

Quindi,

$$\mu(E) = \int_{P_1 E} 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy\,.$$

Usiamo di nuovo la formula di riduzione sull'insieme $D = P_1 E$. Abbiamo che $P_1 D = [-r, r]$ e $D_x = [-\sqrt{r^2 - x^2}, \sqrt{r^2 - x^2}\,]$, per ogni $x \in [-r, r]$. Pertanto,

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \int_D 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy = \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, dy \right) dx \\ &= \int_{-r}^{r} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2(r^2 - x^2) \cos^2 u\, du \right) dx = \frac{4}{3}\pi r^3.\end{aligned}$$

(Abbiamo operato la sostituzione $u = \arcsin(y/\sqrt{r^2 - x^2})$, ossia $y = \sqrt{r^2 - x^2} \sin u$.)

3) Vogliamo calcolare il volume del tetraedro regolare di lato ℓ. Lo supporremo appoggiato al piano xy, per cui la sua "base" è un triangolo equilatero di lato ℓ, altezza $h = \frac{1}{2}\ell\sqrt{3}$ e area $A = \frac{1}{4}\ell^2\sqrt{3}$. L'altezza del tetraedro E è pertanto

$$H = \sqrt{\ell^2 - (\tfrac{2}{3}h)^2} = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\ell\,.$$

Raggruppiamo le variabili come $((x, y), z)$ e proiettiamo sull'asse z, ottenendo $P_2 E = \left[0, \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\ell\right]$. Per ogni $z \in P_2 E$, la sezione E_z è un triangolo equilatero di lato $\ell_z = \ell - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, z$ e area

$$\mu(E_z) = \frac{1}{4}\ell_z^2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\ell - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, z\right)^2.$$

Pertanto,

$$\mu(E) = \int_0^H \mu(E_z)\, dz = \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}\,\ell} \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\ell - \sqrt{\frac{3}{2}}\, z\right)^2 dz = \frac{\sqrt{2}}{12}\,\ell^3.$$

Nota. Dehn ha dimostrato nel 1902, in risposta al Terzo Problema di Hilbert, che non è possibile tagliare il tetraedro in poliedri più piccoli che, ricombinati assieme, formino un parallelepipedo.

Più in generale, consideriamo ora un "cono" tridimensionale E. Esso è ottenuto prendendo un insieme S, che supponiamo contenuto in $\{(x,y,z) : z=0\}$ (la "base" di E) e un punto $\boldsymbol{v}=(0,0,h)$, con $h>0$ (il "vertice" di E). L'insieme E è così definito:

$$E = \{(1-\lambda)\boldsymbol{v} + \lambda\boldsymbol{x} : \lambda \in [0,1],\, \boldsymbol{x} \in S\}\,.$$

La sua proiezione sull'asse z ci dà il segmento $P_2E=[0,h]$, e per ogni $z \in P_2E$ la sezione E_z ha un'area

$$\mu(E_z) = \Big(\frac{h-z}{h}\Big)^2 \mu(E_0) = \Big(\frac{h-z}{h}\Big)^2 \mu(S)\,.$$

Quindi il volume del cono E è

$$\mu(E) = \int_{P_2E} \mu(E_z)\,dz = \int_0^h \Big(\frac{h-z}{h}\Big)^2 \mu(S)\,dz = \frac{1}{3}\,\mu(S)h\,,$$

ossia "area della base volte altezza diviso tre".

6 Cambiamento di variabili nell'integrale

Se $I=[a,b]$ è un intervallo in $\mathbb{R}$ e $\varphi : I \to \mathbb{R}$ è una funzione derivabile con derivata continua, qualora $f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ sia continua possiamo scrivere la formula di integrazione per sostituzione

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du\,.$$

Si noti che $\varphi(I)$ è un intervallo i cui estremi potrebbero non coincidere con $\varphi(a)$ e $\varphi(b)$. Questo si verifica invece se φ sia strettamente monotona, nel qual caso la formula si può scrivere come

$$\int_{\varphi(I)} f(x)\,dx = \int_I f(\varphi(u))|\varphi'(u)|\,du\,.$$

Infatti, se φ è strettamente decrescente, si ha che $|\varphi'(u)| = -\varphi'(u)$ e $\int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f = -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f$. Cercheremo ora di estendere tale formula.

Per iniziare, consideriamo il caso in cui f è costante di valore 1, per cui la formula diventa

$$\mu(\varphi(I)) = \int_I |\varphi'(u)|\,du\,.$$

Sia $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una funzione lineare, per cui esiste $\mathbb{A}$, una matrice 2×2, tale che $\varphi(\boldsymbol{x}) = \mathbb{A}\boldsymbol{x}$. Supponiamo che $\mathbb{A}$ sia invertibile. Se $I=[0,1]\times[0,1]$, allora $\varphi(I)$ è un parallelogramma, la cui area è $|\det\mathbb{A}|$. Si noti che in questo caso la matrice jacobiana di φ è costante, $J\varphi(\boldsymbol{u}) = \mathbb{A}$ per ogni $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$, per cui abbiamo che

$$\mu(\varphi(I)) = \int_I |\det J\varphi(\boldsymbol{u})|\, d\boldsymbol{u}\,.$$

Questa formula si estende a un qualsiasi diffeomorfismo $\varphi : A \to B$, dove A e B sono due aperti limitati di $\mathbb{R}^2$. Se I è un rettangolo contenuto in A, lo si può suddividere in molti piccoli sottorettangoli, su ciascuno dei quali la funzione φ sarà approssimata dalla ben nota formula

$$\varphi(\boldsymbol{u}) = \varphi(\boldsymbol{u}_0) + J\varphi(u_0)(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0) + r(\boldsymbol{u})\,,$$

che ci riporta a un'espressione lineare con $\mathbb{A} = J\varphi(u_0)$. Si può dimostrare che queste approssimazioni, con un procedimento al limite, forniscono la formula cercata.

Il procedimento descritto sopra si estende a ogni dimensione e si può dimostrare il seguente

Teorema 35 *Sia φ un diffeomorfismo tra due aperti limitati A e $B = \varphi(A)$. Se D è un sottoinsieme misurabile di A, allora $\varphi(D)$ è misurabile, $|\det \varphi'|$ è integrabile su D e si ha:*

$$\mu(\varphi(D)) = \int_D |\det \varphi'(\boldsymbol{u})|\, d\boldsymbol{u}\,.$$

Possiamo ora passare al caso generale, con f una funzione non necessariamente costante. Enunciamo il **teorema di cambiamento di variabili** nell'integrale.

Teorema 36 *Siano φ un diffeomorfismo tra due aperti limitati A e $B = \varphi(A)$ di $\mathbb{R}^N$, D un sottoinsieme misurabile di A e $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è L-integrabile su $\varphi(D)$ se e solo se $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ è L-integrabile su D, nel qual caso si ha:*

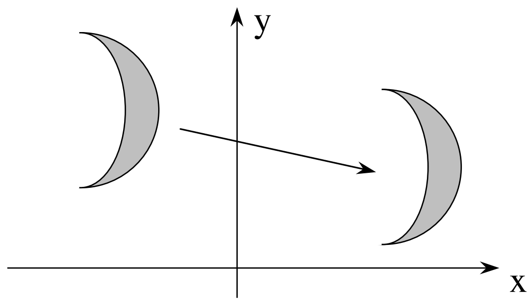
$$\int_{\varphi(D)} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_D f(\varphi(\boldsymbol{u}))|\det \varphi'(\boldsymbol{u})|\, d\boldsymbol{u}\,.$$

Potrebbe essere utile la seguente formula equivalente:

$$\int_E f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(\boldsymbol{u}))|\det \varphi'(\boldsymbol{u})|\, d\boldsymbol{u}\,.$$

7 Alcune trasformazioni utili in $\mathbb{R}^2$

Ci sono alcune trasformazioni che lasciano invariata la misura di ogni insieme misurabile. Ne consideriamo qui alcune delle più usate nella pratica.



Le traslazioni. Si dice traslazione, per mezzo di un vettore fissato $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, la trasformazione definita da

$$\varphi(u, v) = (u + a_1, v + a_2)\,.$$

Si vede immediatamente che φ è un diffeomorfismo con $\det \varphi' = 1$, per cui, dati un insieme limitato misurabile D e una funzione L-integrabile f su $\varphi(D)$, si ha:

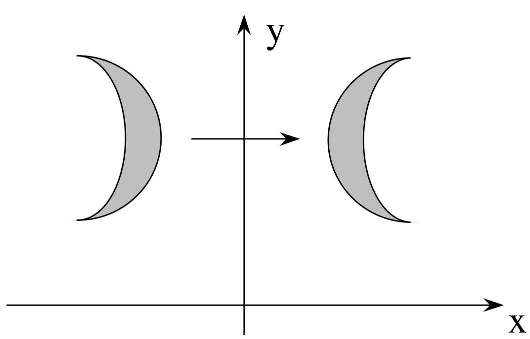
$$\int_{\varphi(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_D f(u + a_1, v + a_2)\, du\, dv\,.$$

Le riflessioni. Una riflessione rispetto ad un asse è definita da:

$$\varphi(u, v) = (-u, v)\,, \qquad \text{oppure} \qquad \varphi(u, v) = (u, -v)\,.$$

Qui $\det \varphi' = -1$, per cui, ad esempio nel primo caso, si ha:

$$\int_{\varphi(D)} f(x, y)\, dx\, dy = \int_D f(-u, v)\, du\, dv\,.$$

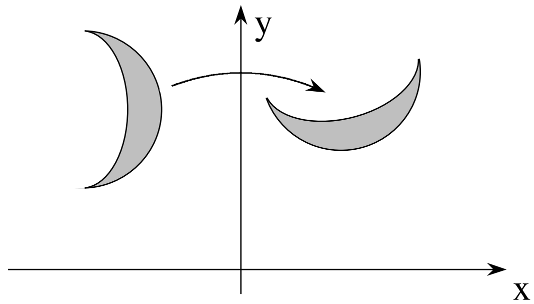


Le rotazioni. Una rotazione attorno all'origine di un angolo fissato α è definita da:

$$\varphi(u, v) = (u \cos \alpha - v \sin \alpha\,,\ u \sin \alpha + v \cos \alpha)\,.$$

Si tratta di un diffeomorfismo, con

$$\det \varphi'(u, v) = \det \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = (\cos \alpha)^2 + (\sin \alpha)^2 = 1\,.$$

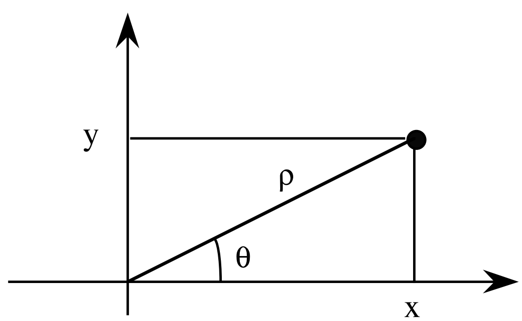


Quindi, dati un insieme limitato misurabile D e una funzione L-integrabile f su $\varphi(D)$, si ha:

$$\int_{\varphi(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_D f(u\cos\alpha - v\sin\alpha\,,\ u\sin\alpha + v\cos\alpha)\,du\,dv\,.$$

Un altro tipo di trasformazione utile è la funzione $\psi : [0,+\infty[\times[0,2\pi[\to \mathbb{R}^2$ data da

$$\psi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,,$$



che definisce le note coordinate polari in $\mathbb{R}^2$. Preso un sottoinsieme limitato misurabile E di $\mathbb{R}^2$, sia B_R una palla aperta di centro l'origine e raggio R che lo contenga. Consideriamo gli insiemi aperti

$$A =]0,R[\times]0,2\pi[\,, \qquad B = B_R \setminus ([0,+\infty[\times\{0\})\,.$$

La funzione $\varphi : A \to B$ definita da $\varphi(\rho,\theta) = \psi(\rho,\theta)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det\varphi'(\rho,\theta) = \rho$. Possiamo applicare il teorema di cambiamento di variabili all'insieme $\tilde{E} = E\cap B$. Siccome $\tilde{E}$ e $\varphi^{-1}(\tilde{E})$ differiscono da E e $\psi^{-1}(E)$, rispettivamente, per un insieme trascurabile, otteniamo la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate polari**:

$$\int_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\psi^{-1}(E)} f(\psi(\rho,\theta))\rho\,d\rho\,d\theta\,.$$

Esempio. Sia $f(x,y) = xy$ definita su

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2<9\}\,.$$

Facendo il cambiamento di variabili in coordinate polari, si vede che $\psi^{-1}(E) = [0,3[\times[0,\frac{\pi}{2}]$; per la formula di riduzione di Fubini, possiamo quindi scrivere

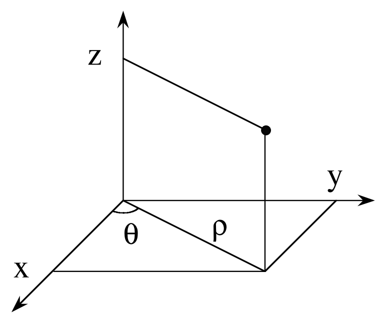
$$\int_E f = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^3 \rho^3 \cos\theta \sin\theta \, d\rho \right) d\theta = \frac{81}{4} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{81}{8} \,.$$

8 Coordinate cilindriche e sferiche in $\mathbb{R}^3$

Consideriamo la funzione $\xi : [0,+\infty[\,\times[0,2\pi[\,\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\xi(\rho,\theta,z) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,,$$

che definisce le coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$. Preso un sottoinsieme limitato



misurabile E di $\mathbb{R}^3$, sia $C_R\times\,]-H,H[$ un cilindro, avente come base il cerchio aperto C_R di centro l'origine e raggio R, che lo contenga. Consideriamo gli insiemi aperti

$$\begin{aligned} A &=]0,R[\,\times\,]0,2\pi[\,\times\,]-H,H[\,, \\ B &= (C_R \setminus ([0,+\infty[\,\times\{0\})\times\,]-H,H[\,. \end{aligned}$$

La funzione $\varphi : A \to B$ definita da $\varphi(\rho,\theta,z) = \xi(\rho,\theta,z)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det\varphi'(\rho,\theta,z) = \rho$. Possiamo applicare il teorema di cambiamento di variabili all'insieme $\tilde{E} = E \cap B$. Siccome $\tilde{E}$ e $\varphi^{-1}(\tilde{E})$ differiscono da E e $\xi^{-1}(E)$, rispettivamente, per un insieme trascurabile, otteniamo la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate cilindriche**:

$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\xi^{-1}(E)} f(\xi(\rho,\theta,z))\rho\,d\rho\,d\theta\,dz\,.$$

Esempio. Calcoliamo l'integrale $\int_E f$, dove $f(x,y,z) = x^2+y^2$ e

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1, 0 \le z \le x+y+\sqrt{2}\}\,.$$

Passando a coordinate cilindriche, notiamo che

$$\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + \sqrt{2} \ge 0\,,$$

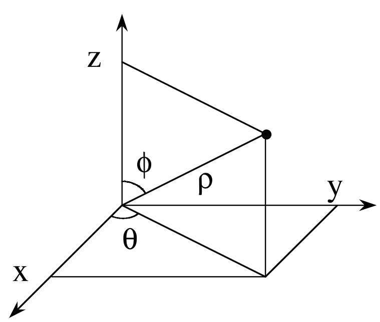
per ogni $\theta \in [0, 2\pi[$ e ogni $\rho \in [0, 1]$. Facendo il cambio di variabili e usando Fubini, si ha:

$$\begin{aligned}
\int_E (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz &= \int_{\xi^{-1}(E)} \rho^3\, dz\, d\theta\, d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + \sqrt{2}} \rho^3\, dz \right) d\theta \right) d\rho \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + \sqrt{2})\, d\theta \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \rho^3 \sqrt{2}\, d\rho \\
&= \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\,.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora la funzione $\sigma : [0, +\infty[\, \times [0, 2\pi[\, \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho\cos\phi)\,,$$

che definisce le coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$. Preso un sottoinsieme limitato mis-



urabile E di $\mathbb{R}^3$, sia B_R una palla aperta tridimensionale di centro l'origine e raggio R, che lo contenga. Consideriamo gli insiemi aperti

$$A = \,]0, R[\, \times\,]0, 2\pi[\, \times\,]0, \pi[\,, \qquad B = B_R \setminus ([0, +\infty[\, \times \{0\} \times \mathbb{R})\,.$$

La funzione $\varphi : A \to B$ definita da $\varphi(\rho, \theta, \phi) = \sigma(\rho, \theta, \phi)$ risulta essere un diffeomorfismo e si vede facilmente che $\det \varphi'(\rho, \theta, \phi) = \rho^2 \sin\phi$. Possiamo applicare il teorema di cambiamento di variabili a $\tilde{E} = E \cap B$. Siccome $\tilde{E}$ e $\varphi^{-1}(\tilde{E})$ differiscono da E e $\sigma^{-1}(E)$, rispettivamente, per un insieme trascurabile, otteniamo la seguente **formula di cambiamento di variabili in coordinate sferiche**:

$$\int_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_{\sigma^{-1}(E)} f(\sigma(\rho, \theta, \phi)) \rho^2 \sin\phi\, d\rho\, d\theta\, d\phi\,.$$

Esempio. Calcoliamo il volume dell'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1, z \ge \sqrt{x^2 + y^2} \right\}\,.$$

Si ha:

$$\begin{aligned}
\mu(E) &= \int_E 1\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_{\sigma^{-1}(E)} \rho\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \sin\phi\,d\theta \right) d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(\int_0^{\pi/4} \rho^2 \sin\phi\,d\phi \right) d\rho \\
&= 2\pi \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \int_0^1 \rho\,d\rho \\
&= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{2\pi}{3}\,.
\end{aligned}$$

9 Integrale su sottoinsiemi non limitati

Useremo la notazione

$$B[0,r] = [-r,r] \times [-r,r] \times \cdots \times [-r,r] \subseteq \mathbb{R}^N.$$

Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$, non necessariamente limitato, e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata tale che

$$f(\boldsymbol{x}) \geq 0\,, \text{ per ogni } \boldsymbol{x} \in E\,.$$

Se f è integrabile su ciascun insieme limitato $E \cap B[0,r]$, con $r > 0$, si definisce

$$\int_E f = \lim_{r\to+\infty} \int_{E\cap B[0,r]} f\,.$$

Si noti che il limite esiste sempre, siccome la funzione $r \mapsto \int_{E\cap B[0,r]} f$ è crescente, essendo $f \geq 0$. Inoltre, il risultato non cambia se al posto di $B[0,r]$ si considera la palla euclidea $B(0,r)$, o una qualsiasi famiglia crescente di insiemi che invadono $\mathbb{R}^2$. Qualora tale limite risulti finito, la funzione f si dirà **integrabile** (o **L-integrabile**) su E.

Nel caso in cui la funzione assuma anche valori negativi, procediamo in questo modo. Definiamo le funzioni $f^\pm : E \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f^+(\boldsymbol{x}) = \max\{f(\boldsymbol{x}), 0\}\,, \qquad f^-(\boldsymbol{x}) = \max\{-f(\boldsymbol{x}), 0\}\,,$$

per cui $f(\boldsymbol{x}) = f^+(\boldsymbol{x}) - f^-(\boldsymbol{x})$. Si noti che $f^+ \geq 0$ e $f^- \geq 0$. Se ben definito, si pone quindi

$$\int_E f = \int_E f^+ - \int_E f^-.$$

In tal caso, f si dirà **L-integrabile**. Osserviamo infatti che $|f(\boldsymbol{x})| = f^+(\boldsymbol{x}) + f^-(\boldsymbol{x})$, quindi se f^+ e f^- sono integrabili, avremo anche

$$\int_E |f| = \int_E f^+ + \int_E f^- .$$

Si dimostra senza grosse difficoltà che l'insieme delle funzioni L-integrabili è uno spazio vettoriale, e l'integrale è una funzione lineare su di esso che conserva l'ordine.

Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice **misurabile** se $E \cap B[0,r]$ è misurabile, per ogni $r > 0$. In tal caso, si pone

$$\mu(E) = \lim_{r \to +\infty} \mu(E \cap B[0,r]) .$$

Si noti che il valore $\mu(E)$ può essere in alcuni casi $+\infty$. Esso è finito se e solo se la funzione costante 1 è L-integrabile su E, ossia la funzione caratteristica di E è L-integrabile su $\mathbb{R}^N$. Le proprietà degli insiemi limitati misurabili si estendono facilmente agli insiemi illimitati. In particolare, sono misurabili tutti gli insiemi aperti e tutti i chiusi.

Anche il **teorema di riduzione** di G. Fubini si estende a funzioni definite su un sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$ non necessariamente limitato. Sia $N = N_1 + N_2$ e scriviamo $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$. Per ogni $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$, consideriamo le **sezioni** di E :

$$E_{\boldsymbol{x}} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{N_2} : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E\} , \qquad E_{\boldsymbol{y}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N_1} : (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in E\} ,$$

e le **proiezioni** di E :

$$P_1 E = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{N_1} : E_{\boldsymbol{x}} \neq \emptyset\} , \qquad P_2 E = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{N_2} : E_{\boldsymbol{y}} \neq \emptyset\} ,$$

Possiamo allora riformulare il teorema nella forma seguente.

Teorema 37 *Sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione L-integrabile sull'insieme E. Allora:*
(i) per quasi ogni $\boldsymbol{x} \in P_1 E$, la funzione $f(\boldsymbol{x}, \cdot)$ è L-integrabile sull'insieme $E_{\boldsymbol{x}}$;
(ii) la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \int_{E_{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y}$, definita quasi ovunque su $P_1 E$, è ivi L-integrabile;
(iii) si ha:

$$\int_E f = \int_{P_1 E} \left(\int_{E_{\boldsymbol{x}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{y} \right) d\boldsymbol{x} .$$

Analogamente, la funzione $\boldsymbol{y} \mapsto \int_{E_{\boldsymbol{y}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}$, definita quasi ovunque su $P_2 E$, è ivi L-integrabile, e si ha:

$$\int_E f = \int_{P_2 E} \left(\int_{E_{\boldsymbol{y}}} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x} \right) d\boldsymbol{y} .$$

Corollario 38 *Sia E un insieme misurabile. Allora E ha misura finita se e solo se:*
(i) per quasi ogni $\boldsymbol{x} \in P_1 E$, l'insieme $E_{\boldsymbol{x}}$ è misurabile e ha misura finita;
(ii) la funzione $\boldsymbol{x} \mapsto \mu(E_{\boldsymbol{x}})$, definita quasi ovunque su $P_1 E$, è ivi L-integrabile;
(iii) si ha:

$$\mu(E) = \int_{P_1 E} \mu(E_{\boldsymbol{x}})\, d\boldsymbol{x}\,.$$

Con enunciato simmetrico, se E ha misura finita, si ha pure

$$\mu(E) = \int_{P_2 E} \mu(E_{\boldsymbol{y}})\, d\boldsymbol{y}\,.$$

La **formula di cambiamento di variabili nell'integrale** si estende anch'essa ad insiemi non limitati, con enunciato analogo.

Teorema 39 *Siano φ un diffeomorfismo tra due aperti A e $B = \varphi(A)$ di $\mathbb{R}^N$, D un sottoinsieme misurabile di A e $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è L-integrabile su $\varphi(D)$ se e solo se $(f \circ \varphi)|\det \varphi'|$ è L-integrabile su D, nel qual caso si ha:*

$$\int_{\varphi(D)} f(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} = \int_D f(\varphi(\boldsymbol{u}))|\det \varphi'(\boldsymbol{u})|\, d\boldsymbol{u}\,.$$

Si possono fare le stesse considerazioni per quanto riguarda i cambiamenti di variabili in coordinate polari in $\mathbb{R}^2$ o in coordinate cilindriche o sferiche in $\mathbb{R}^3$.

Esempio 1. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ e $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\alpha}$, con $\alpha > 0$. Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_E \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dx\, dy &= \int_0^{2\pi} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^{2\alpha}} \rho\, d\rho\, d\theta \\ &= 2\pi \int_1^{+\infty} \rho^{1-2\alpha}\, d\rho\,.\end{aligned}$$

Si vede quindi che f è integrabile su E se e solo se $\alpha > 1$, nel qual caso l'integrale vale $\frac{\pi}{\alpha-1}$.

Esempio 2. Calcoliamo la misura tridimensionale dell'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 1, \sqrt{y^2 + z^2} \leq \frac{1}{x} \right\}.$$

Usando Fubini, raggruppando le variabili (y, z) abbiamo

$$\mu(E) = \int_1^{+\infty} \pi \frac{1}{x^2}\, dx = \pi\,.$$

Esempio 3. Consideriamo la funzione $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$ e facciamo un cambiamento di variabili in coordinate polari:

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^{+\infty} = \pi\,.$$

Notiamo che, usando il Teorema di Fubini, si ha:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-y^2}\,dx\right)dy\\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy\right)\\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2,\end{aligned}$$

per cui ritroviamo il risultato

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}\,.$$

Terminiamo con la **proprietà di additività** dell'integrale.

Teorema 40 *Siano $E_1,\dots,E_n$ sottoinsiemi misurabili di $\mathbb{R}^N$, a due a due non sovrapposti (ossia $\mu(E_i\cap E_j)=0$ se $i\neq j$), la cui unione è un insieme E. Allora $f:E\to\mathbb{R}$ è L-integrabile su E se e solo se f è L-integrabile su ciascuno degli $E_1,\dots,E_n$, e in tal caso, si ha*

$$\int_E f = \int_{E_1} f + \cdots + \int_{E_n} f\,.$$

10 Integrale su una M-superficie

Sia $\sigma: I\to\mathbb{R}^N$ una M-superficie, con $1\le M\le N$. Possiamo considerare, al variare degli indici $i_1,\dots,i_M$, le matrici $M\times M$ che si ottengono selezionando dalla matrice jacobiana $J\sigma(\boldsymbol{u})$ le corrispondenti righe

$$\sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_{i_1}}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & \dots & \frac{\partial\sigma_{i_1}}{\partial u_M}(\boldsymbol{u})\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \frac{\partial\sigma_{i_M}}{\partial u_1}(\boldsymbol{u}) & \dots & \frac{\partial\sigma_{i_M}}{\partial u_M}(\boldsymbol{u})\end{pmatrix}.$$

Definiamo, per ogni $\boldsymbol{u}\in I$, i vettori $\binom{N}{M}-$dimensionali

$$\Sigma(\boldsymbol{u}) = \left(\det\sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u})\right)_{1\le i_1<\dots<i_M\le N}.$$

Indicheremo con $\|\Sigma(\boldsymbol{u})\|$ la norma euclidea di $\Sigma(\boldsymbol{u})$:

$$\|\Sigma(\boldsymbol{u})\| = \left[\sum_{1\le i_1<\dots<i_M\le N}\left(\det\sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u})\right)^2\right]^{1/2}.$$

Definizione 41 *La funzione $f:U\to\mathbb{R}$ è integrabile sulla M-superficie $\sigma: I\to\mathbb{R}^N$ se $(f\circ\sigma)||\Sigma||$ è integrabile su I. In tal caso, si pone*

$$\int_\sigma f = \int_I f(\sigma(\boldsymbol{u}))||\Sigma(\boldsymbol{u})||\,d\boldsymbol{u}\,.$$

Ad esempio, ogni funzione continua f sarà integrabile su σ.

Nel caso $M = 1$, abbiamo una curva $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ e, data una funzione scalare f definita sul supporto di σ, si ha:

$$\int_\sigma f = \int_a^b f(\sigma(t))||\sigma'(t)||\,dt\,.$$

Se $M = 2$ e $N = 3$, abbiamo una superficie $\sigma : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^3$ e, data una funzione scalare f definita sul supporto di σ, si ha:

$$\int_\sigma f = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1} f(\sigma(u, v)) \left\| \frac{\partial\sigma}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\sigma}{\partial v}(u, v) \right\| du\,dv\,.$$

Definizione 42 *Due M-superfici $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ e $\tilde\sigma : J \to \mathbb{R}^N$ si dicono* **equivalenti** *se hanno lo stesso supporto ed esistono due insiemi aperti $A \subset I$, $B \subset J$, e un diffeomorfismo $\varphi : A \to B$ con le seguenti proprietà: gli insiemi $I \setminus A$ e $J \setminus B$ sono trascurabili e, per ogni $\boldsymbol{u} \in A$, $\sigma(\boldsymbol{u}) = \tilde\sigma(\varphi(\boldsymbol{u}))$.*

L'integrale non differisce per M-superfici equivalenti.

Teorema 43 *Se σ e $\tilde\sigma$ sono due M-superfici equivalenti, si ha:*

$$\int_\sigma f = \int_{\tilde\sigma} f\,.$$

Dimostrazione. Con le notazioni introdotte in precedenza, essendo $\sigma(\boldsymbol{u}) = \tilde\sigma(\varphi(\boldsymbol{u}))$ con $\varphi : A \to B$, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\Sigma(\boldsymbol{u}) &= \big(\det \sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\boldsymbol{u})\big)_{1\le i_1<\dots<i_M\le N} \\
&= \big(\det\big(\tilde\sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\varphi(\boldsymbol{u}))\varphi'(\boldsymbol{u})\big)\big)_{1\le i_1<\dots<i_M\le N} \\
&= \big(\det \tilde\sigma'_{(i_1,\dots,i_M)}(\varphi(\boldsymbol{u}))\big)_{1\le i_1<\dots<i_M\le N} \det\varphi'(\boldsymbol{u}) \\
&= \tilde\Sigma(\varphi(\boldsymbol{u}))\det\varphi'(\boldsymbol{u})\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, per il teorema di cambiamento di variabili, essendo $I \setminus A$ e $J \setminus B$ trascurabili, si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\sigma f &= \int_A f(\sigma(\boldsymbol{u}))||\Sigma(\boldsymbol{u})||\,d\boldsymbol{u} \\
&= \int_A f(\tilde\sigma(\varphi(\boldsymbol{u})))||\tilde\Sigma(\varphi(\boldsymbol{u}))||\,|\det\varphi'(\boldsymbol{u})|\,d\boldsymbol{u} \\
&= \int_B f(\tilde\sigma(\boldsymbol{v}))||\tilde\Sigma(\boldsymbol{v})||\,d\boldsymbol{v} = \int_{\tilde\sigma} f\,.
\end{aligned}$$

■

Come vedremo in seguito, non sempre due M-superfici aventi lo stesso supporto sono equivalenti. Introduciamo una classe particolare di M-superfici per le quali questo inconveniente non si verifica.

Definizione 44 *Una M-superficie $\sigma : I \to \mathbb{R}^N$ è una M-**parametrizzazione** di un insieme $\mathcal{M}$ se è regolare, iniettiva su $\mathring{I}$, e $\sigma(I) = \mathcal{M}$. Diremo che un sottoinsieme di $\mathbb{R}^N$ è M-**parametrizzabile** se esiste una sua M-parametrizzazione.*

Esempi. La circonferenza $\mathcal{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è parametrizzabile e $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, definita da $\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$, ne è una parametrizzazione.

Una parametrizzazione della sfera $\mathcal{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è, ad esempio, $\sigma : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, definita da

$$\sigma(\phi, \theta) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)\,.$$

Teorema 45 *Due M-parametrizzazioni di uno stesso insieme sono sempre equivalenti.*

Se $\mathcal{M}$ è un insieme M-parametrizzabile, possiamo definire l'integrale di f su $\mathcal{M}$ ponendolo uguale a $\int_\sigma f$, dove σ è una qualunque parametrizzazione di $\mathcal{M}$. Lo denoteremo con

$$\int_{\mathcal{M}} f\, d\mu_M\,, \qquad \text{oppure} \qquad \int_{\mathcal{M}} f(x)\, d\mu_M(x)\,.$$

Se $M = N$, si riottiene l'integrale usuale, ossia $\int_{\mathcal{M}} f(x)\, dx$.

11 Misura M-dimensionale

È interessante il caso in cui f è costantemente uguale a 1 : in accordo con l'idea fisica del moto di una particella lungo un percorso descritto dalla funzione σ, in questo caso l'integrale di linea si chiama **lunghezza** [1] (o misura curvilinea) della curva σ, e si scrive:

$$\iota_1(\sigma) = \int_a^b ||\sigma'(t)||\, dt\,.$$

Esempio. Sia $\sigma : [0, b] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\sigma(t) = (t, t^2, 0)$. Il suo supporto è un

[1] Naturalmente questa definizione è anche giustificata da considerazioni geometriche, che preferiamo omettere per ragioni di brevità, sul concetto intuitivo che di solito si ha della lunghezza di un cammino.

arco di parabola, e la sua lunghezza è data da:

$$\begin{aligned}
\iota_1(\sigma) &= \int_0^b \sqrt{1+(2t)^2}\,dt \\
&= \int_{\sinh^{-1}(0)}^{\sinh^{-1}(2b)} \frac{1}{2}(\cosh u)^2\,du \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{u+\sinh u\cosh u}{2}\right]_0^{\sinh^{-1}(2b)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\sinh^{-1}(2b)+2b\sqrt{1+4b^2}\right) \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(2b+\sqrt{1+4b^2}\right)+\frac{b}{2}\sqrt{1+4b^2}\,.
\end{aligned}$$

È interessante il caso in cui f è costantemente uguale a 1 : in questo caso si chiama **area** (o misura superficiale) della superficie σ il seguente integrale:

$$\iota_2(\sigma) = \int_{a_2}^{b_2}\int_{a_1}^{b_1}\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)\times\frac{\partial\sigma}{\partial v}(u,v)\right\|\,du\,dv\,.$$

Nel caso in cui la superficie risulti essere una 2-parametrizzazione di un certo insieme, questo integrale è il flusso di un campo di vettori che in ogni punto della superficie coincide con il versore normale. [2]

Esempio. Sia $\sigma : [0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\phi,\theta) = (R\sin\phi\cos\theta, R\sin\phi\sin\theta, R\cos\phi)\,.$$

Il suo supporto è una sfera di raggio R, e la sua area è data da:

$$\begin{aligned}
\iota_2(\sigma) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{(R^2\sin^2\phi\cos\theta)^2+(R^2\sin^2\phi\sin\theta)^2+(R^2\sin\phi\cos\theta)^2}\,d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\sin\phi\,d\phi\,d\theta \\
&= 4\pi R^2\,.
\end{aligned}$$

In generale, nel caso in cui f è costantemente uguale a 1 abbiamo la seguente

Definizione 46 *Si dice* **misura M-superficiale** *di una M-superficie $\sigma : I\to\mathbb{R}^N$ il seguente integrale:*

$$\iota_M(\sigma) = \int_I ||\Sigma(\boldsymbol{u})||\,d\boldsymbol{u}\,.$$

Come ragionevolmente ci si aspetta, da quanto visto sopra segue immediatamente che due M-superfici equivalenti hanno sempre la stessa misura M-superficiale.

[2]Naturalmente anche la definizione di area può essere giustificata da considerazioni geometriche, anche se la questione risulta molto più delicata che nel caso delle curve.

Esempio. Le due curve $\sigma, \tilde{\sigma} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definite da

$$\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t)) \,, \quad \tilde{\sigma}(t) = (\cos(2t), \sin(2t)) \,,$$

pur avendo lo stesso supporto, non sono equivalenti. Infatti, come facilmente si vede, $\iota_1(\sigma) = 2\pi$ mentre $\iota_1(\tilde{\sigma}) = 4\pi$.

Alla luce di quanto sopra, è possibile dare la seguente

Definizione 47 *Si chiama* **misura** M**-dimensionale** *di un insieme M-parametrizzabile $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^N$ la misura M-superficiale di una qualunque sua M-parametrizzazione.*

Nei casi $M = 1, 2$, la misura M-dimensionale di $\mathcal{M}$ si chiama spesso **lunghezza** o **area** di $\mathcal{M}$, rispettivamente. Si potrà parlare, ad esempio, di lunghezza di una circonferenza e di area di una sfera.

Se $M = N$, si può verificare che la misura N-dimensionale dell'insieme $\mathcal{M}$ coincide con la misura usuale che abbiamo trattato nella prima parte di queste note.

12 La lanterna di Schwarz

In un autorevole libro francese sul calcolo differenziale e integrale del 1880 si trova questa affermazione:

"Sia una porzione di superficie curva limitata da un contorno C. Chiameremo area di questa superficie il limite S verso il quale tende l'area di una superficie poliedrale iscritta formata da facce triangolari e limitata da un contorno poligonale avente per limite il contorno C. Occorre dimostrare che il limite esiste ed è indipendente dalla legge secondo la quale decrescono le facce della superficie poligonale iscritta."

Ebbene, come dimostrato indipendentemente da Schwarz e da Peano, questa affermazione è falsa. Cercheremo ora di capire perché.

Consideriamo la superficie laterale di un cilindro con base circolare di raggio r e altezza h. La parametrizziamo in coordinate cilindriche, per mezzo della funzione $\sigma : [0, 2\pi] \times [0, h] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\sigma(\theta, z) = (r \cos\theta, r \sin\theta, z) \,.$$

La sua area, come facilmente si vede, è uguale a $2\pi rh$.

La "lanterna di Schwarz" è un poliedro, avente $4mn$ facce triangolari, inscritto nel suddetto cilindro. I vertici del poliedro corrispondono ai punti che si ottendono suddividendo il dominio in nm sottorettangoli

$$\left[(j-1)\frac{2\pi}{m}, j\frac{2\pi}{m}\right] \times \left[(k-1)\frac{h}{n}, k\frac{h}{n}\right] \,, \qquad \text{con } j = 1, \dots, m \,,\ k = 1, \dots, n \,,$$

e poi dividendo ciascuno di essi, per mezzo delle loro due diagonali, in quattro triangoli uguali. Indicheremo con $A(m, n)$ l'area di questo poliedro.

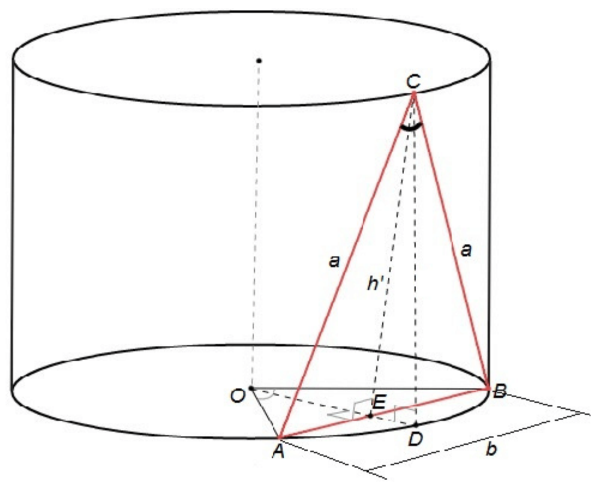
Usando semplici formule geometriche si vede che ciascuna delle $4mn$ facce del poliedro è un triangolo isoscele avente base di lunghezza

$$b = 2r \sin\left(\frac{\pi}{m}\right),$$

e altezza di lunghezza

$$h' = \sqrt{r^2\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\right]^2 + \left(\frac{h}{2n}\right)^2}.$$

Si veda la figura:



$$AE = r\sin\left(\frac{\pi}{m}\right),\ OE = r\cos\left(\frac{\pi}{m}\right),\ ED = r\Big(1-\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)\Big),\ CD = \frac{h}{2n}.$$

Pertanto, la somma delle aree dei $4mn$ triangoli vale

$$A(m,n) = 4mn\frac{b\,h'}{2} = 2\pi r\frac{\sin\left(\frac{\pi}{m}\right)}{\frac{\pi}{m}}\sqrt{h^2 + \left[2\,\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}{(\frac{\pi}{m})^2}\right]^2\left(\frac{\pi^2 rn}{m^2}\right)^2}.$$

C'è in questa formula un termine "scomodo": $\left(\frac{\pi^2 rn}{m^2}\right)^2$. Se $m \to +\infty$ e $n \to +\infty$, non è detto che esso tenda a zero, come si vorrebbe, per avere che $A(m,n) \to 2\pi rh$. Anzi, possiamo affermare che

il limite di $A(m,n)$ per $(m,n) \to (+\infty,+\infty)$ non esiste!

Si noti ad esempio che $A(m,m) \to 2\pi rh$, mentre $A(m,m^3) \to +\infty$ e, per ogni $\ell \geq 2\pi rh$, esiste una successione $(n_m)_m$ tale che $n_m \to +\infty$ e $A(m,n_m) \to \ell$.