Teorema Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi lineari. Se $f: V \to W$ è lineare e biettiva, allora $f^{-1}: W \to V$ è lineare.

Dim
- Siano $w_1, w_2 \in W \Rightarrow \exists\, v_1, v_2 \in V$ t.c. $w_1 = f(v_1)$, $w_2 = f(v_2) \Rightarrow v_1 = f^{-1}(w_1)$, $v_2 = f^{-1}(w_2)$

$$f^{-1}(w_1 + w_2) = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1 + v_2)) =$$
$$= v_1 + v_2 = f^{-1}(w_1) + f^{-1}(w_2).$$

- Siano $\lambda \in \mathbb{K}$, $w \in W \Rightarrow \exists\, v \in V$ t.c. $w = f(v) \Rightarrow v = f^{-1}(w)$

$$f^{-1}(\lambda w) = f^{-1}(\lambda f(v)) = f^{-1}(f(\lambda v)) = \lambda v = \lambda f^{-1}(w)$$

Quindi f^{-1} è lineare.

Def Siano V e W $\mathbb{K}$-spazi lineari. Un isomorfismo da V a W è un'applicazione lineare e biettiva $f: V \to W$.

OSS

1) Per il teorema se $f: V \to W$ è un isomorfismo allora $f^{-1}: W \to V$ è un isomorfismo.
2) $id_V : V \to V$ è un isomorfismo
3) $f: U \to V$ e $g: V \to W$ isomorfismi $\Rightarrow$ $g \circ f : U \to W$ isomorfismo. Infatti $g \circ f$ è lineare per un teorema della precedente lezione, ed è anche biettiva, con $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Def Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$. Diciamo che A è invertibile se esiste una matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ t.c. $AB = BA = I_n$. In tal caso poniamo $B =: A^{-1}$ e A^{-1} è detta matrice inversa di A.

Es 1) $I_n I_n = I_n \Rightarrow I_n^{-1} = I_n$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

Teorema Supponiamo che $A \in M_n(\mathbb{K})$ sia invertibile. Allora l'inversa di A è unica.

Dim Siano $B, B' \in M_n(\mathbb{K})$ inverse di A.

$AB = I_n$ e $AB' = I_n \Rightarrow AB = AB' \Rightarrow$

$BAB = BAB' \Rightarrow I_n B = I_n B' \Rightarrow B = B'$.

Teorema Siano V, W $\mathbb{K}$-spazi vettoriali di dimensione finita e siano $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ una base per V e $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_n)$ una base per W. Supponiamo che $f: V \to W$ sia un isomorfismo. Allora

$$M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(f^{-1}) = \left(M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f) \right)^{-1}$$

cioè la matrice di f^{-1} rispetto alle basi $\mathcal{W}$ e $\mathcal{V}$ è l'inversa della matrice di f.

Dim Si osserva subito che $M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(id_V) = I_n$.

Poniamo $A = M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f)$, $B = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(f^{-1})$.

$$I_n = M_{\mathcal{V}}(id_V) = M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{V}}(f^{-1}\circ f) =$$
$$= M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(f^{-1})\, M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f) = BA.$$

$$I = M_{\mathcal{W}}(id_W) = M_{\mathcal{W}}(f\circ f^{-1}) =$$
$$= M^{\mathcal{W}}_{\mathcal{V}}(f)\, M^{\mathcal{V}}_{\mathcal{W}}(f^{-1}) = AB.$$

Quindi $B = A^{-1}$.

Def Due $\mathbb{K}$-spazi vettoriali V e W sono <u>isomorfi</u> se <u>esiste</u> un isomorfismo $f: V \to W$ e scriveremo
$$V \cong W \quad \text{e} \quad f: V \xrightarrow{\cong} W$$

OSS Per quanto detto sopra, l'isomorfismo di $\mathbb{K}$-spazi vettoriali è una relazione d'equivalenza:

i) $V \cong V$ essendo $id_V : V \to V$ un isomorfismo;

ii) $V \cong W \Rightarrow W \cong V$ dato che se $f: V \to W$ è un isomorfismo, allora lo è anche $f^{-1}: W \to V$;

iii) $V \cong W$ e $W \cong U \Rightarrow V \cong U$ dato che se $f: V \xrightarrow{\cong} W$ e $g: W \xrightarrow{\cong} U \Rightarrow g\circ f : V \xrightarrow{\cong} U$.

Nota Più avanti mostreremo che $V \cong W \iff \dim V = \dim W$ (se $\dim V = \dim W < \infty$).

Def Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale. L'insieme
$$\mathrm{Aut}(V) \overset{\mathrm{def}}{=} \{ f : V \to V \mid f \text{ isomorfismo} \}$$
si chiama gruppo degli automorfismi di V.

OSS In effetti $\mathrm{Aut}(V)$ è un gruppo rispetto all'operazione di composizione, per quanto dimostrato sopra:

1) $id_V \in V$
2) $f, g \in \mathrm{Aut}(V) \Rightarrow f \circ g \in \mathrm{Aut}(V)$
3) $f \in \mathrm{Aut}(V) \Rightarrow f^{-1} \in \mathrm{Aut}(V)$.

In generale $\mathrm{Aut}(V)$ non è abeliano!

$\mathrm{Aut}\, V$ non è uno spazio vettoriale! Infatti non contiene l'applicazione nulla, essendo $0 : V \to V$ non iniettiva, 0 non è invertibile (tranne nel caso banale in cui $V = \{0\}$).

Sistemi lineari

<u>Def</u> Sia $\mathbb{K}$ un campo. Consideriamo una matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e un vettore colonna $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$. Sia $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ una n-upla di incognite. Il <u>sistema lineare</u> di <u>matrice</u> A e <u>termine noto</u> B è il seguente

$$S: \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m . \end{cases}$$

m è il numero di equazioni e n il numero di incognite.

Il sistema lineare precedente si scrive anche in <u>forma matriciale</u>

$$S: \quad AX = B$$

<u>Es</u> 1) $m = n = 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $2x = 3$

2) $m = 2$, $n = 2$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) $m = 2$, $n = 3$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + (1+i)x_3 = 2-i \\ i x_2 + 2x_3 = 1+3i \end{cases}$$

Def Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathbb{K}^m$. Si chiama <u>soluzione</u> del sistema

$$S: \quad AX = B$$

un vettore $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ t.c.

$$AU = B.$$

Si dice che il sistema S è <u>compatibile</u> se ammette almeno una soluzione. Se S non ammette soluzioni, si dice che S è <u>incompatibile</u>.

<u>Es</u> 1) $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ è <u>compatibile</u> in quanto ammette la soluzione $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

2) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases}$ è <u>incompatibile</u>.