LEZIONE 19

Abbiamo visto la serie di Fourier:
espansione nella "base":

$$\{1\} \cup \left\{\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right\}_{n \geq 1}$$

nell'intervallo $[-L, L]$.

Dalla serie alla <u>trasformata</u> che è definita per funzioni su tutta la retta reale $\mathbb{R}$.
È conveniente usare la "base" data dagli esponenziali complessi. Partiamo da funzioni su $[-T, T]$ espanse nella "base"

$$\left\{ e^{-i \frac{n\pi t}{T}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

$t \to x$, $T \to L$

In questo caso la "base" è ortogonale rispetto al prodotto:

$$\left[(f, g) = \int_{-T}^{T} dt \, \underbrace{f^*(t)}_{\text{mettiamo il complesso coniugato}} g(t) \right]$$

prodotto hermitiano

[Questo tipo di prodotto su spazi vettoriali su $\mathbb{C}$ si chiama prodotto hermitiano, che soddisfa:

- $(f, g) = (g, f)^*$ [mentre per il prodotto scalare: $(v, w) = (w, v)$]
- $(f, \alpha g) = \alpha (f, g)$, $\alpha \in \mathbb{C}$
- $(\alpha f, g) = \alpha^* (f, g)$, $\alpha \in \mathbb{C}$

[mentre per un prodotto scalare:
$(\alpha v, w) = \alpha (v, w)$
$(v, \alpha w) = \alpha (v, w)$]]

$$\left(e^{-i\frac{n\pi t}{T}},\ e^{-i\frac{m\pi t}{T}}\right) = 2T\,\delta_{nm} \qquad *$$

simile al calcolo che abbiamo visto per $\int_{-L}^{+L} dx\, \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$.

Usando queste proprietà, troviamo le formule per i coefficienti nell'espansione in questa base:

$$\begin{cases} f(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n\, e^{-i\frac{n\pi t}{T}} & \boxed{\text{diamo per buono}} \\ \left[\hat{f}_n^{\,*} = \dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-T}^{+T} dt\, \underbrace{f^*(t)}_{f(t)}\left(\underbrace{e^{i\frac{n\pi t}{T}}}_{e^{-i\frac{n\pi t}{T}}}\right)^*\right] & \end{cases}$$

sostituiamo e troviamo le formule per i coefficienti.

$*$

$$f \in \mathbb{R} \Rightarrow \left[(\hat{f}_n)^* = \hat{f}_{-n}\right]$$

Ogni termine: $\hat{f}_n \, e^{-i\frac{n\pi t}{T}}$

si interpreta come una componente della funzione $f(t)$ a frequenza fissata: $\left[\omega_n = \frac{n\pi}{T}\right] \quad n \in \mathbb{Z}$.

Notiamo: $\left[\omega_{n+1} - \omega_n = \frac{\pi}{T}\right]$

Nel limite $[-T, T] \xrightarrow[T\to\infty]{} \mathbb{R}$ il set discreto di frequenze diventa continuo:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n \, e^{-i\frac{n\pi t}{T}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{T} \left(\underline{2T} \hat{f}_n\right) e^{-i\frac{n\pi t}{T}}$$

Per $T \to \infty$: $\frac{\pi}{T} \Rightarrow d\omega$, $e^{-i\frac{n\pi t}{T}} \Rightarrow e^{-i\omega t}$

$$2T\hat{f}_n = \int_{-T}^{+T} dt \, f(t) \, e^{i\frac{n\pi t}{T}} \Longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dt \, f(t) \, e^{i\omega t} \equiv \hat{f}(\omega)}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}_n \, e^{-i\frac{n\pi t}{T}} \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{f}(\omega) \, e^{-i\omega t} \equiv f(t)$$

Quindi siamo partiti da $f(t)$ funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$, abbiamo ottenuto i coefficienti delle componenti a frequenze fissate:

$$\boxed{\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, f(t) \, e^{+i\omega t}}$$

$f \longmapsto \hat{f}$, $\hat{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$

TRASFORMATA DI FOURIER

e abbiamo infine scritto la decomposizione di $f(t)$ come:

$$\boxed{f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \hat{f}(\omega) \, e^{-i\omega t}}$$

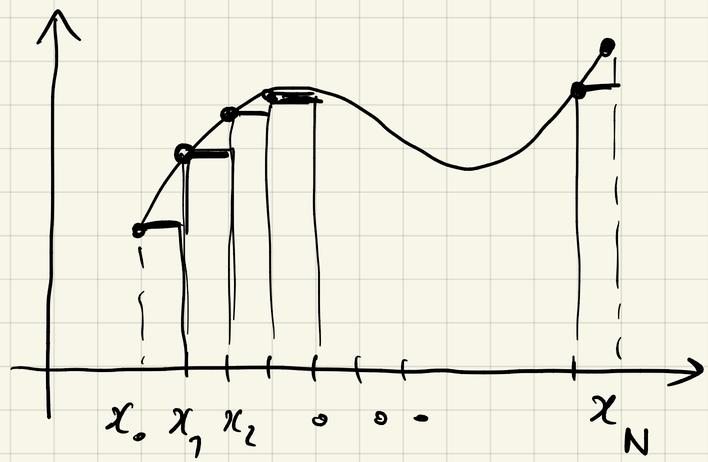
$\hat{f} \longmapsto f$

ANTITRASFORMATA

Cenni su Integrale di Lebesgue:

motivazione: alcuni risultati su questo tipo di integrale che ci saranno utili per discutere le trasformata di Fourier.

Riemann

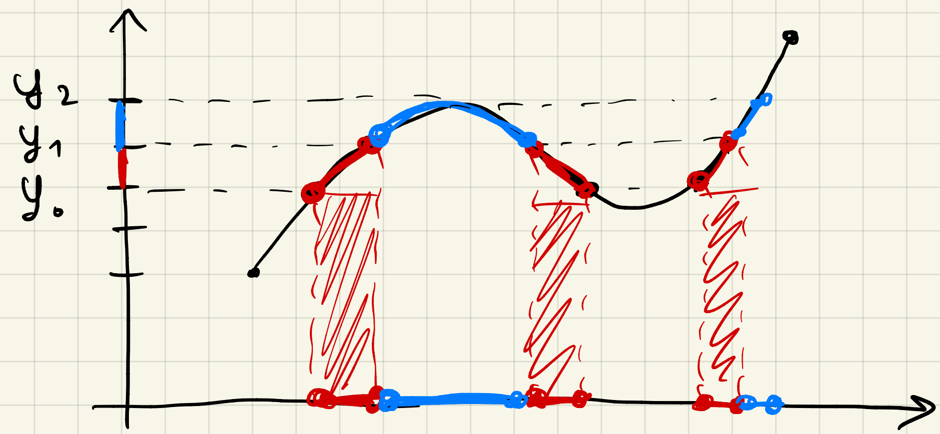


dominio della funzione diviso in intervalli

$\Rightarrow$ approssimiamo l'area sottostante il grafico della funzione usando rettangoli che hanno come base i nostri segmenti

$[x_i, x_{i+1}[$. Serve che i valori della funzione siano sufficientemente stabili all'interno dei segmenti per poter assegnare un valore all'altezza del rettangolo.

Lebesgue



codominio della funzione è diviso in intervalli

$\Rightarrow$ per approssimare l'area sottostante la curva possiamo calcolare la lunghezza delle controimmagini:

$$f^{-1}([y_i, y_{i+1}[)$$

Per approssimare l'area: (lunghezza di $f^{-1}([y_i, y_{i+1}[)$)

$\times\, y_i$

Non è più richiesto che la funzione sia molto stabile.

Mentre per Riemann il lato sull'asse x era "banale" e sempre di lunghezza $x_{i+1} - x_i$, nel caso di Lebesgue abbiamo più sotto controllo le variazioni della funzione, ma dobbiamo capire come assegnare una lunghezza a insiemi abbastanza generali $\subset \mathbb{R}$.

I sottoinsiemi a cui si può associare una lunghezza si dicono <u>misurabili</u> e la funzione:

$$\mu : \{\text{Insiemi misurabili}\} \longrightarrow [0, +\infty]$$

si dice <u>misura</u>. [Nozione più facile da generalizzare! Se definiamo insiemi misurabili e misure su un generico insieme X, possiamo poi definire integrali per funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ oppure $\mathbb{C}$].

Nel caso di funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la misura che ci interessa si chiama misura di Lebesgue. Non ne vedremo la costruzione dettagliata, ma alcune proprietà importanti sono:

- $\longrightarrow$ tutti gli aperti e chiusi sono misurabili;
- $\longrightarrow$ per un intervallo, fa quello che ci aspettiamo:

$$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = b-a \quad ;$$

- $\longrightarrow$ un numero finito di punti ha misura 0;
- $\longrightarrow$ anche un insieme numerabile di punti ha misura 0; (e.g. $\mu(\mathbb{Q}) = 0$).

Usando queste misure, definiamo l'integrale di Lebesgue prendendo il limite delle somme delle aree dei rettangoli ottenuti ripartendo l'asse y, come visto prima. Per approfondire come si costruisce la misura e l'integrale di Lebesgue: capitolo 11 di Rudin.

Con questa nozione di integrale, si possono integrare una vasta classe di funzioni, dette "misurabili" ovvero tali che: $\underbrace{f^{-1}([a,b[)}$ sia misurabile.

Classe di funzioni vaste e ben definita

$\Longleftarrow$ Nel caso di Riemann invece è difficile classificare per quali funzioni l'integrale esiste

Inoltre: Riemann-integrabile $\Longrightarrow$ Lebesgue-integrabile e l'integrale coincide.

Se due funzioni differiscono solo su un insieme numerabile, allora il loro integrale coincide; più in generale, due funzioni hanno lo stesso integrale se differiscono su insiemi di misura NULLA $\mu(E)=0$.

Ad esempio:

$$\underbrace{\chi_{\mathbb{Q}}(x)} = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

non integrabile con Riemann.

Usando l'integrale di Lebesgue: $\chi_{\mathbb{Q}}$ differisce da $f \equiv 0$, solo su un insieme numerabile $\Rightarrow \int \chi_{\mathbb{Q}} = 0$.

Una conseguenza molto utile del passaggio all'integrale di Lebesgue è che è più facile controllare come si comporta sotto limite, e quando sia possibile scambiare integrali, tutte cose difficili per l'integrale di Riemann. Alcuni risultati che useremo:

Teorema della convergenza dominata: (TCD)

$f_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, E misurabile (e.g. $\mathbb{R}$ oppure un intervallo)

f_n funzioni misurabili, e che $\forall x \in E$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x)$.

Se esiste $F(x)$ misurabile su E tale che:

$|f_n(x)| \leq F(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$, $\int_E F(x)\,dx$ è finito.

allora: $\boxed{\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx}$ (11.32 da Rudin).

Teorema di Fubini-Tonelli: $f: \mathbb{R}^2_{(x,y)} \to \mathbb{R}$ misurabile in x e in y. Allora vale che:

$$\int dx \int dy \, |f(x,y)| = \int dy \int dx \, |f(x,y)|$$

e **se** questo integrale è $< +\infty$ allora vale anche che:

$$\int dx \int dy \, f(x,y) = \int dy \int dx \, f(x,y).$$

(dimostrazione in un setting un pò più generale si trova nel cap. 8 del secondo volume di Rudin: "Real and Complex Analysis").