Def Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e sia $S:\ AX = B$ il corrispondente sistema lineare. L'insieme

$$\Sigma_S \overset{\text{def}}{=} \{ U \in \mathbb{K}^n \mid AU = B \} \subset \mathbb{K}^n$$

è chiamato spazio delle soluzioni di S.

Oss S è compatibile $\iff \Sigma_S \neq \phi$.

Un sistema lineare del tipo $AX = 0_{\mathbb{K}^m}$, cioè con tutti i termini noti nulli è detto sistema omogeneo.

$AX = 0_{\mathbb{K}^m}$ è compatibile dato che ha la soluzione nulla.

Def Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $A' \in M_{\ell,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^m$, $B' \in \mathbb{K}^\ell$ e poniamo $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
I sistemi lineari

$$S:\ AX = B \quad \text{e} \quad S':\ A'X = B'$$

sono detti equivalenti se $\Sigma_S = \Sigma_{S'} \subset \mathbb{K}^n$.

In altre parole S e S' sono equivalenti se hanno lo stesso numero di incognite e le stesse soluzioni.

Def Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. La prima entrata non nulla di ciascuna riga $A^{(i)}$ di A è detta pivot.

Es I pivot di $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sono $1, 4, 9$

Def Una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ è detta <u>matrice a gradini</u> se è della forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \multicolumn{1}{|l}{*} & \cdots & & & & & \\ \cline{4-5} 0 & \cdots & & 0 & \multicolumn{1}{|l}{*} & \cdots & & & & \\ \cline{5-6} \vdots & 0 & & 0 & \cdots & 0 & \multicolumn{1}{|l}{*} & \cdots & & \\ \cline{7-8} \vdots & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & \multicolumn{1}{|l}{*} & \cdots & \\ \cline{8-9} 0 & \cdots & & 0 & \cdots & & & 0 & \multicolumn{1}{|l}{\cdots} & \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

cioè se il pivot $*$ di ciascuna riga è più a destra del pivot della riga precedente.

<u>Es</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ è a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ non è a gradini

Sia ora $S: AX = B$ un sistema lineare e supponiamo che A sia una matrice a gradini. In tal caso il sistema stesso è detto <u>a gradini</u>.

In generale il pivot della prima riga non è detto che sia a_{11}, sarà un'entrata $a_{1k_1} \neq 0$, per un certo $k_1 \geq 1$. Il pivot della seconda riga sarà $a_{2k_2} \neq 0$ con $k_2 > k_1$ e così via: il pivot di $A^{(i)}$ è $a_{ik_i} \neq 0$ per $i = 1, \dots, s$, mentre le righe $A^{(s+1)}, \dots, A^{(m)}$ sono nulle, per un certo $s \leq m$.

Es Consideriamo il sistema nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ \quad\quad x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Il coefficiente di x_1 è nullo e la matrice del sistema è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

che è a gradini.

Illustriamo il metodo di risoluzione:

nella 2ª equazione possiamo assegnare a x_4 un valore arbitrario $t \in \mathbb{R}$ e ricaviamo x_3

$$\begin{cases} x_4 = t \\ x_3 = -5t \\ x_2 = 1 + 15t + t \\ x_1 = u \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = u \\ x_2 = 16t + 1 \\ x_3 = -5t \\ x_4 = t \end{cases}, \quad t, u \in \mathbb{R}$$

Scegliendo arbitrariamente i parametri $t, u \in \mathbb{R}$ si ottengono tutte le soluzioni.

In generale se $S: AX = B$ è <u>a gradini</u> si procede così:

0) Se c'è un'equazione del tipo $0 = b_i$, con $b_i \neq 0$, allora il sistema è incompatibile;

1) le incognite che non compaiono (perché i loro coefficienti sono nulli) e le incognite che non hanno un pivot come coefficiente diventano parametri liberi;

2) partendo dall'ultima equazione si risolve rispetto alle incognite che hanno un pivot come coefficiente;

3) in modo progressivo si sostituisce ciascuna incognita calcolata come sopra nelle equazioni precedenti. Alla fine si ottengono tutte le soluzioni facendo variare tutti i parametri in $\mathbb{K}$ in tutti i modi possibili, oppure si ottiene l'unica soluzione se non vi sono parametri (questo capita se tutte le incognite hanno un pivot).

In particolare, un sistema a gradini è <u>compatibile</u> $\Longleftrightarrow$ non vi sono equazioni del tipo $0 = b_i$ con $b_i \neq 0$.

Esempi

1) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ y + z = 0 \\ z = 5 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = 16 \\ y = -5 \\ z = 5 \end{cases}$ $\quad$ unica soluzione $(16, -5, 5) \in \mathbb{R}^3$

2) $\begin{cases} x + 5y - 3z = 1 \\ 4y - z = 2 \\ 0 = 3 \end{cases}$ $\quad$ incompatibile

3) $\begin{cases} x + 3y - 3z = 0 \\ y + 5z = 3 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = 18t - 9 \\ y = -5t + 3 \\ z = t \end{cases}$ $\quad$ $t \in \mathbb{R}$ $\quad$ ∞ soluzioni

4) Incognite x, y, z, t

$\begin{cases} x + 3y - t = 0 \\ y - t = 0 \\ t = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = u \\ t = 0 \end{cases}$ $\quad$ $u \in \mathbb{R}$ $\quad$ ∞ soluzioni

$$\Sigma = \{(0, 0, u, 0) \mid u \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^4$$

5) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x_1 = -3t + u + 1 \\ x_2 = t \\ x_3 = u \\ x_4 = t \end{cases}$ $\quad$ $t, u \in \mathbb{R}$

$$\Sigma = \{(-3t + u + 1, t, u, t) \mid t, u \in \mathbb{R}\}$$

Dato un sistema lineare vorremo trovare un sistema a gradini equivalente modificando la <u>matrice completa</u>.

Def Sia $T \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Le seguenti operazioni sono dette <u>operazioni elementari sulle righe</u>:

1) scambiare due righe di T;
2) moltiplicare una riga per uno scalare non nullo
3) Sommare ad una riga un multiplo di un'altra riga.

In modo analogo si definiscono le operazioni elementari sulle colonne.

Teorema Siano $S: AX = B$ e $S': A'X = B'$ sistemi lineari. Se $(A'|B')$ è ottenuta da $(A|B)$ mediante una successione finita di operazioni elementari sulle righe, allora S e S' sono equivalenti.

Dim E' sufficiente dimostrare il teorema nel caso in cui $(A'|B')$ si ottenga da $(A|B)$ con una singola operazione elementare sulle righe.

1) Scambiare due righe di $(A|B)$ equivale a scambiare due equazioni, e

questo non modifica l'insieme delle soluzioni, che non dipendono dall'ordine delle equazioni.

2) Moltiplicare una riga di $(A \mid B)$ per uno scalare non nullo equivale a moltiplicare entrambi i membri di un'equazione per lo stesso scalare e anche questo non ne modifica le soluzioni.

3) Supponiamo che $(A' \mid B')$ si ottenga da $(A \mid B)$ sommando alla riga i-esima la j-esima moltiplicata per $\lambda \neq 0$, $i \neq j$.
Quindi la i-esima equazione di S' è $(A^{(i)} + \lambda A^{(j)}) X = b_i + \lambda b_j$
mentre le altre equazioni sono le stesse.

Se U è soluzione di S allora
$A^{(i)} U = b_i$, $i = 1, \dots, m$

$$\Rightarrow \left(A^{(i)} + \lambda A^{(j)}\right) U = A^{(i)} U + \lambda A^{(j)} U = b_i + \lambda b_j$$

$\Rightarrow U$ è soluzione di S'.

Siano ora $\tilde{A} = (A \mid B)$, $\tilde{A}' = (A' \mid B')$

$(\tilde{A}')^{(i)} = \tilde{A}^{(i)} + \lambda \tilde{A}^{(j)}$

$(\tilde{A}')^{(s)} = \tilde{A}^{(s)} \quad \forall s \neq i$

$$\Rightarrow \quad \tilde{A}^{(i)} = (\tilde{A}')^{(i)} - \lambda (\tilde{A}')^{(j)}$$

cioè $(A \mid B)$ si ottiene da $(A' \mid B')$ con un'operazione elementare di tipo (3).
Quindi se U è soluzione di S', per quanto dimostrato sopra, è anche soluzione di S. Cioè S e S' hanno le stesse soluzioni.