$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(1-x)^{2x}}{(1+x^2)^x} = e^{-2}$$

$(1+x^2)^x \to 0^+$

$$\lim_{x\to-\infty} (1+x^2)^x = \lim_{x\to-\infty} e^{x\log(1+x^2)} = 0$$

$x\log(1+x^2) \to +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} (1-x)^{2x} = \lim_{x\to-\infty} e^{2x\log(1-x)} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{2x\log(1-x)}}{e^{x\log(1+x^2)}} = \lim_{x\to-\infty} e^{2x\log(1-x) - x\log(1+x^2)}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2\log(1-x) - \log(1+x^2)}{\frac{1}{x}} \overset{\text{l'H}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{-2}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= x^2\left(\frac{2}{1-x} + \frac{2x}{1+x^2}\right) = 2x^2\left(\frac{1+\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}}{(1-x)(1+x^2)}\right) = \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{\frac{1}{x}+1}{\left[(1-x)\cdot\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right]} \to -2$$

$\left(\frac{1}{x^2}+1\right) \to 1$

$$2\,\frac{x+1}{-x+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1}$$

$f^{(9)}(0)$ $\qquad$ $f(x) = x^3\left(e^{x^3} - \operatorname{sen}(x^2)\right)$

$e^t = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3!}t^3 + E_3$ $\qquad$ $e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{6}x^9 + E_3$

$E_3 = o(t^3)$ $\qquad$ $E_3 = o(x^9)$

$\operatorname{sen} t = 1 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^6)$ $\qquad$ $\operatorname{sen}(x^2) = 1 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5!}x^{10} \dots$

$$f(x) = x^3\left(\cancel{1} + x^3 + \frac{1}{2}x^6 - \cancel{1} + \frac{1}{6}x^6 \dots + E\right) = x^3\left(x^3 + \frac{2}{3}x^6 + E\dots\right) = \underbrace{x^6 + \frac{2}{3}x^9 + E\dots}$$

$$f(x) = \underbrace{f(0) + f'(0)\cdot x + \dots + \frac{1}{9!}f^{(9)}(0)\,x^9} + E\dots$$

$\Rightarrow \frac{1}{9!}f^{(9)}(0) = \frac{2}{3}$ $\qquad$ $f^{(9)}(0) = \frac{2\cdot 9!}{3}$

$= 2\cdot 8!\cdot 3$

$= 6\cdot 8!$

$f(x) = \cos(2x)$

$f'(x)$

$f''(x)$

$\cos(x^2)$

$\frac{2^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{2}{3}$

$\cos(t) = 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{4!} t^4 + o(t^4)$

$t = 2x$

$\cos(2x) = 1 - \frac{1}{2} (2x)^2 + \frac{1}{4!} (2x)^4 + o((2x)^4)$

$= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3} x^4$

$1 - \frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{4!} x^8$

$\cos(x-1)$

$\cancel{1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{4!}(x-1)^4 + o(}$

$f(t)$

$\varphi(x)$

$P(\varphi(x))$

$\sinh x$ $\quad$ $\cosh x$

$\uparrow$ $\quad$ $\uparrow$

dispari $\quad$ pari

$\geq 0 \quad \forall x \geq 0$ $\quad$ ≥ 1

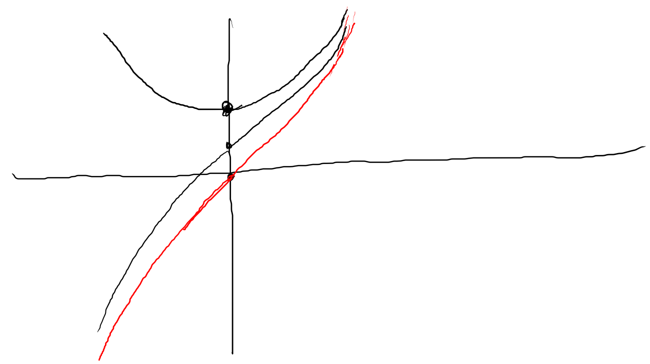
$$\operatorname{tgh} x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) < \frac{1}{2} e^{x} < \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) = \cosh x$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\cosh x - \sinh x\right) = \lim_{x \to +\infty} \cancel{\frac{1}{2} e^{x}} + \frac{1}{2} e^{-x} \cancel{- \frac{1}{2} e^{x}} + \frac{1}{2} e^{-x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$$

le funzioni $\sinh x$, $\cosh x$, $\frac{1}{2} e^{x}$ sono asintotiche a $+\infty$



$D \sinh x = D$ ...

senh x è invertibile su $\mathbb{R}$; esiste l'inversa settorsenh $y = x$ se e solo se $y = \operatorname{senh} x$

$$y = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right)$$

$$2y = e^{-x}\left(e^{2x} - 1\right)$$

$$2y\,e^{x} = e^{2x} - 1 \qquad e^{x} = t$$

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

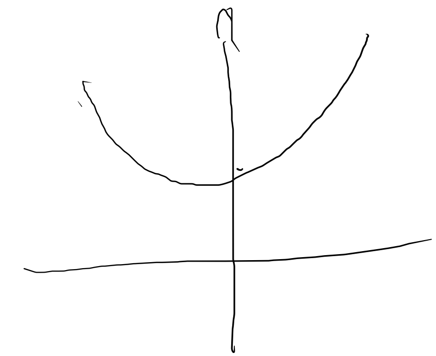
$$\rightarrow t = y \pm \sqrt{y^2+1} \qquad e^{x} = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$y - \sqrt{y^2+1} < 0 \qquad \cancel{e^{x} = y - \sqrt{y^2-1}}$$

$$x = \underbrace{\log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)}_{\parallel}$$

$$\operatorname{settsenh}(y) \quad : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$\cosh\big|_{[0,+\infty[} : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$



$\mathrm{settcosh} : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$

Funzioni convesse

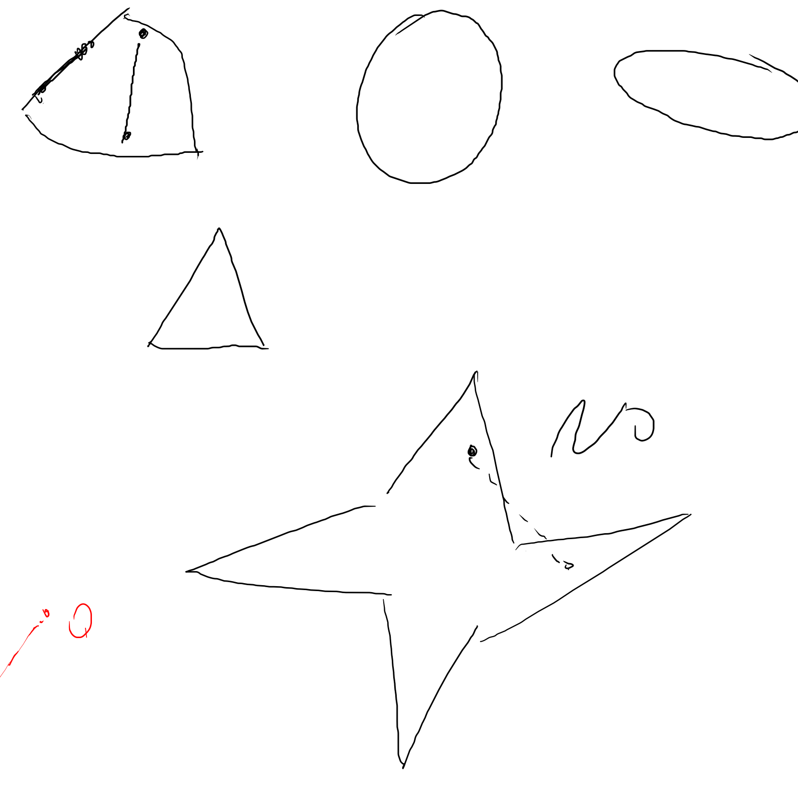
Insiemi convessi:

Un insieme $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice convesso se $\forall P, Q \in E$ il segmento che congiunge P e Q è contenuto in E.

Cioè $\forall P, Q \in E \quad \forall t \in [0,1]$

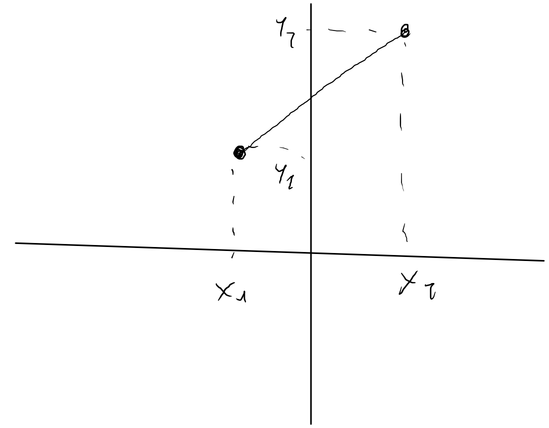
$$\underbrace{(1-t)P + tQ} \in E$$

parametrizzazione del segmento tra P e Q



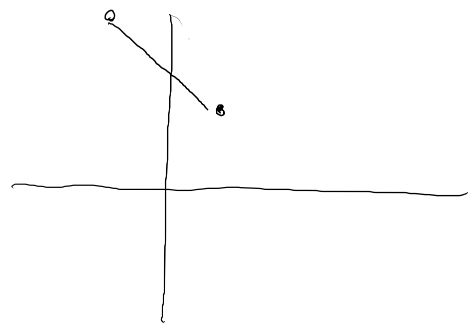
in $\mathbb{R}^2$ $\qquad P = (x_1, y_1) \qquad Q = (x_2, y_2)$

$$(1-t)P + tQ = \big((1-t)x_1 + t x_2 \,,\, (1-t)y_1 + t y_2\big)$$



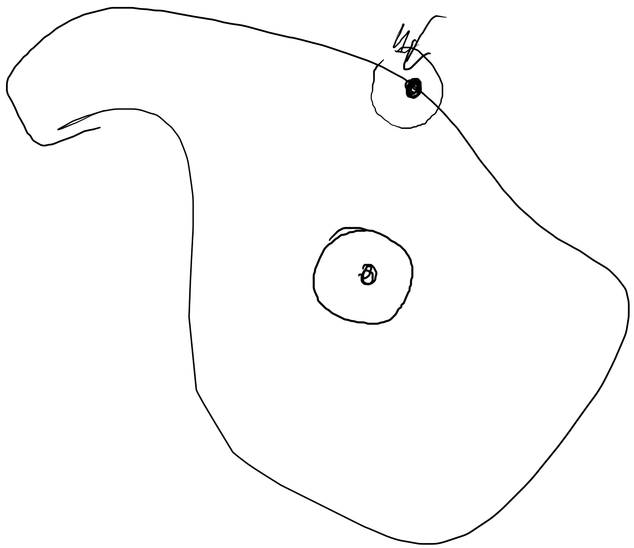
Es: $\quad (1,2) \qquad (-1,3)$

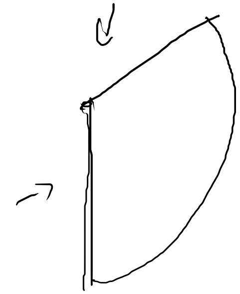
$$\big((1-t)1 - t \,,\, (1-t)2 + 3t\big)$$
$$\parallel$$
$$\big(1-2t \,,\, 2+t\big) \qquad t \in [0,1]$$



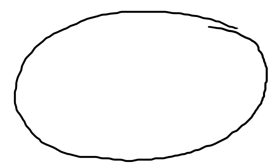
E è strettamente convesso se $\forall\ P, Q \in E \quad \forall\ t \in \,]0,1[$ $\quad \boxed{(1-t)P + tQ \text{ è interno all'insieme } E}$

<u>Def.</u>: E insieme. P è interno ad E se esiste un intorno U di P tale che $U \subseteq E$.

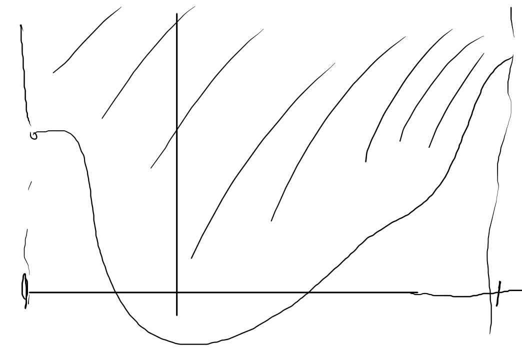




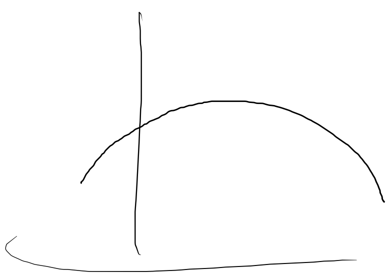
convesso non strettamente convesso



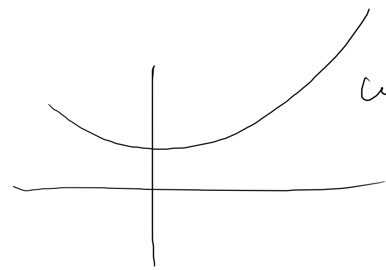
Def. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, diremo epigrafico di f l'insieme $\text{epi} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I, \ y \geq f(x)\}$



Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ I <u>intervallo</u> si dice convessa se il suo epigrafico è un insieme convesso; f si dice concava se $-f$ è convessa.

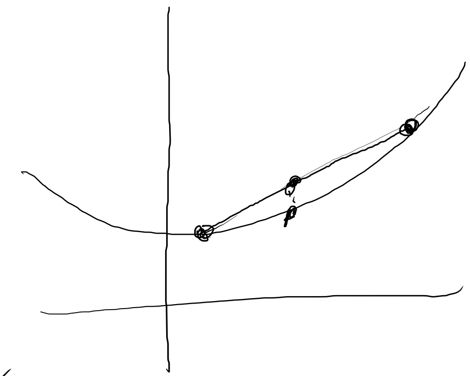


concava



convessa

f convesso significa che presi due punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ appartenenti al grafico di f

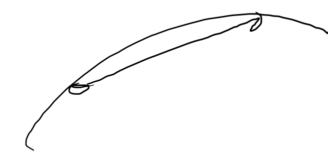


ogni punto del tipo

$$\left((1-t)x_1 + t x_2, \underbrace{(1-t)f(x_1) + t f(x_2)}\right)$$

appartiene all'epigrafico di f, cioè

$$\boxed{(1-t)f(x_1) + t f(x_2) \geq f((1-t)x_1 + t x_2)} \quad \forall t \in [0,1]$$

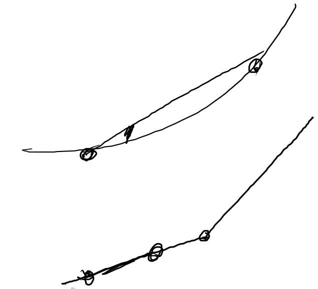


[f concava se $\forall x_1, x_2 \in I$ e $\forall t \in [0,1]$ si ha

$$(1-t)f(x_1) + t f(x_2) \leq f((1-t)x_1 + t x_2)$$]

$f: I \to \mathbb{R}$ si dice strettamente convessa [concava] se $\forall x_1, x_2 \in I$ $\quad x_1 < x_2$

e $\forall t \in]0,1[\qquad f((1-t)x_1 + t x_2) < (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$ $\quad [>]$



OSSERVAZIONE FONDAMENTALE SULLE FUNZIONI CONVESSE

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ convessa. Allora per ogni $x_1, x_2 \in I$

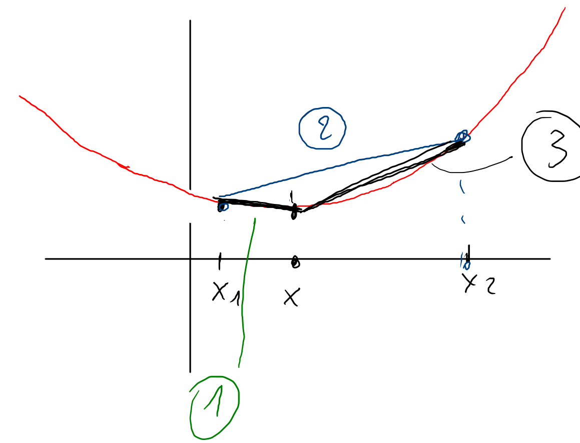
$x_1 < x_2$ e $\forall x \in]x_1, x_2[$, si ha

$$\boxed{\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}}$$

3

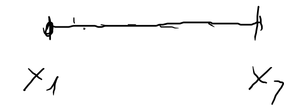
coeffic. angolare di 1

coeff. angolare di 2



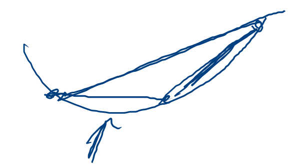
$x_1 < x < x_2$ esiste $t \in]0,1[$ tale che $x = (1-t)x_1 + t x_2$

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \frac{f\big((1-t)x_1 + t x_2\big) - f(x_1)}{\underbrace{(1-t)x_1 + t x_2 - x_1}} \le \frac{(1-t)f(x_1) + t f(x_2) - f(x_1)}{t(x_2-x_1)} = *$$



(1)

$$\cancel{x_1} - t x_1 + t x_2 - \cancel{x_1} = t(x_2-x_1)$$



f convesso significa $f\big((1-t)x_1 + t x_2\big) \le (1-t)f(x_1) + t f(x_2)$

$$* = \frac{\cancel{f(x_1)} - t f(x_1) + t f(x_2) - \cancel{f(x_1)}}{t(x_2-x_1)} = \frac{\cancel{t}\big(f(x_2)-f(x_1)\big)}{\cancel{t}(x_2-x_1)} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

(2)

$$\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} = \frac{\overbrace{f(x_2)-f\big((1-t)x_1+tx_2\big)}^{f(x_2)(1-t)-(1-t)f(x_1)}}{\underbrace{x_2-\left[(1-t)x_1+tx_2\right]}_{\substack{x_2-x_1+tx_1-tx_2 \\ = \\ \underbrace{(1-t)(x_2-x_1)}_{>0}}}} \geq \frac{f(x_2)-(1-t)f(x_1)-t\,f(x_2)}{(1-t)(x_2-x_1)} =$$

$$= \frac{\cancel{(1-t)}\big(f(x_2)-f(x_1)\big)}{\cancel{(1-t)}(x_2-x_1)} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$$-f\big((1-t)x_1+tx_2\big) \geq -(1-t)f(x_1)+t\,f(x_2)$$

Conseguenze

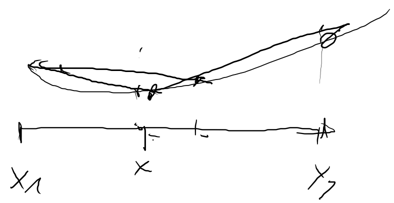
Fissiamo $x_1 < x_2$

considero le funzioni $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$

$$\psi(x) = \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$$

$\varphi, \psi :]x_1, x_2[\to \mathbb{R}$

$\varphi(x) \leq \psi(x)$



φ e ψ sono funzioni crescenti

quindi esistono $\lim_{x \to x_1^+} \varphi(x) = f'_+(x_1)$

$$\lim_{x \to x_2^-} \psi(x) = f'_-(x_2)$$

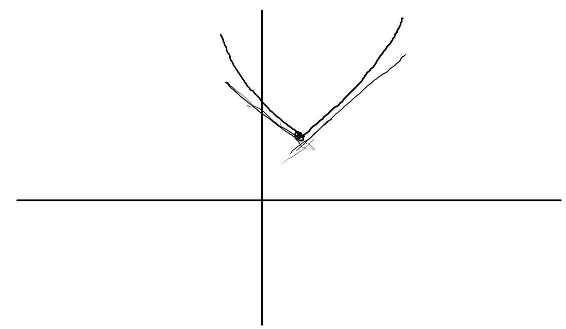
$$f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$$

Teorema

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo, f convesso. Allora $\forall x \in I$ esistono $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$ [naturalmente se $I = [a, b]$ nel punto a esiste solo $f'_+(a)$ e nel punto b esiste solo $f'_-(b)$]

⚠ Sappiamo che in ogni x interno dell'intervallo esiste

$f'_-(x) \leq f'_+(x)$ ma potrebbero essere diverse.



Inoltre $f'_-(x)$ e $f'_+(x)$ sono funzioni crescenti.

Teorema

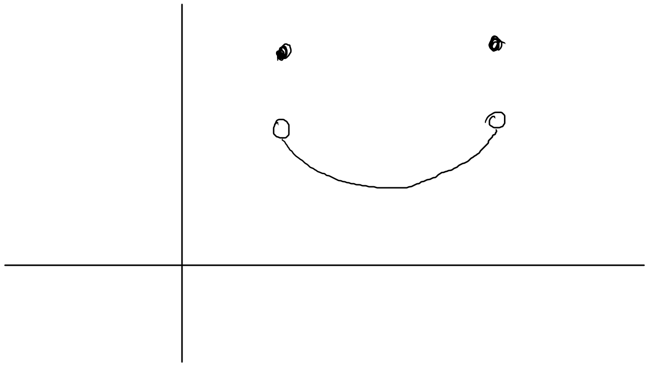
Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ convessa. Allora f è continua.

Sia $x_0 \in]a,b[$, allora esiste $f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

quindi esiste $\lim_{x \to x_0^-} [f(x)-f(x_0)] = \lim_{x \to x_0^-} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)(x-x_0) = 0$

$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ quindi esiste $\lim_{x \to x_0^+} [f(x)-f(x_0)] = 0$

$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ cioè f è continua in x_0



f è convesso NON continua

Teorema I intervallo $f: I \to \mathbb{R}$ f derivabile su I. Allora

f è [strettamente] convesso se e solo se f' è [strettamente] crescente.

Dim

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ convessa; allora $f'(x) = f'_-(x)$ è crescente.

Sia ora $f': I \to \mathbb{R}$ crescente su I. Proviamo che f è convessa.

Siano $x_1 < x_2$ e $t \in]0,1[$; proviamo che $f((1-t)x_1 + t x_2) \leq (1-t) f(x_1) + t f(x_2)$

Fissati x_1 e x_2. Considero la funzione $g: [0,1] \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f((1-t)x_1 + t x_2) - [(1-t) f(x_1) + t f(x_2)]$$ (voglio dimostrare che $g(t) \leq 0 \ \forall t \in [0,1]$)

$$g'(t) = f'((1-t)x_1 + t x_2) \cdot (x_2 - x_1) - [f(x_2) - f(x_1)]$$

$g'(t)$ è crescente su $[0,1]$ (per ipotesi f' è crescente)

$g(1) = f(x_2) - f(x_2) = 0 \qquad g(0) = 0 \qquad g: [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabile e $g(0) = g(1)$

Per il teorema di Rolle esiste $\xi \in]0,1[$ tale che $g'(\xi) = 0$

ora $g'(t)$ è crescente, quindi $g'(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, \xi]$

$g'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [\xi, 1]$

quindi $g(t)$ è decrescente su $[0, \xi]$, $g(t)$ è crescente su $[\xi, 1]$

quindi $g(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0, 1]$