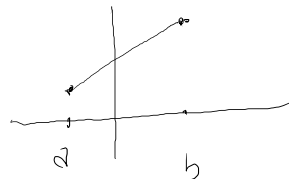


Osservazione

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile e n.º $\left(f'(x) = m \right) \forall x \in [a, b]$



$$\Rightarrow f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \quad \text{e} \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dim. per induzione $g(x) = f(x) - mx \Rightarrow g'(x) = 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow g(x) = q$ costante

quindi $f(x) = mx + q$

$$f(b) - f(a) = mb + q - ma - q = m(b - a)$$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = m$$

$$q = f(x) - mx$$

$$q = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a$$

$$= f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot a$$

$$\begin{aligned} & \frac{f(a) \cdot b - \cancel{f(a) \cdot a} - f(b) \cdot a + \cancel{f(b) \cdot a}}{b - a} = \frac{f(a) \cdot b - f(a) \cdot a + f(b) \cdot a - f(b) \cdot a}{b - a} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot x + f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} a = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a)$$

Concludiamo la dimostrazione:

sappiamo già che f è connesso e che se f è crescente;

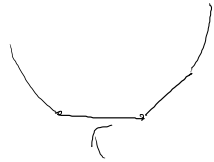
se f non strettamente convessa, allora

esistono $a < b$ tale che $f|_{[a,b]}(x) = mx + q$

ma allora $f'(x) = m$ su $[a,b]$ e quindi f' non è strettamente crescente

se f' non strettamente crescente, allora esiste $[a,b] \subset I$ dove $f'(x) = m \quad \forall x \in [a,b]$

e quindi per l'espressione della $f(x) = mx + q$ su $[a,b]$, quindi f non è strettamente convessa.



Corollario Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ due volte derivabile. Allora

se $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$ allora f è strettamente convessa su I
 $\rightarrow f'$ crescente $\sim f$ esp. conv.

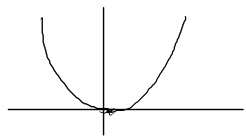
se $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I$ allora f è strettamente concava su I
 $\rightarrow f'$ decrescente $\sim f''(x) \leq 0$

se f è convessa su I allora $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

se f è concava su I allora $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$

⚠ Non è vero che f strettamente convessa implica $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$

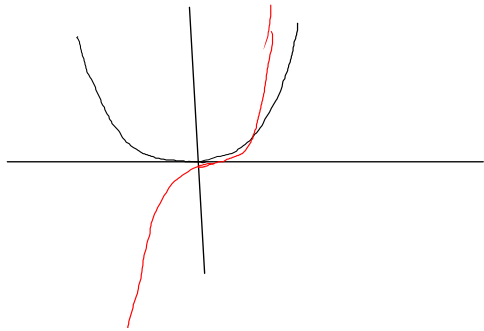
Es: $f(x) = x^4$



$f''(0) = 0$

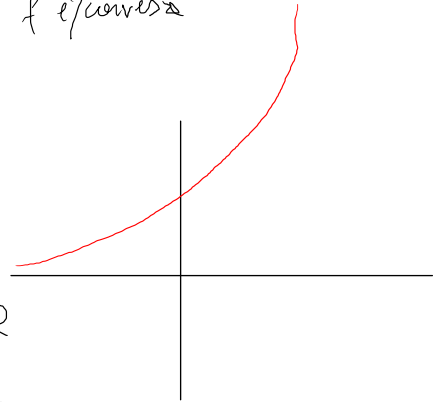
Esempio: $f(x) = x^n$ su $[0, +\infty[$ f è ^{strett.} convessa
 $n \in \mathbb{N}$ su $]-\infty, 0]$ se n è dispari f è ^{strett.} concava
 se n è pari f è ^{strett.} convessa

se n è pari f è ^{strett.} convessa su $\mathbb{R}$



$f(x) = e^x$
^{strett.}
 f convessa su $\mathbb{R}$

$$f''(x) = e^x > 0 \quad \forall x$$



$$e^{-x}$$

1



$$f''(x) = e^{-x} > 0$$

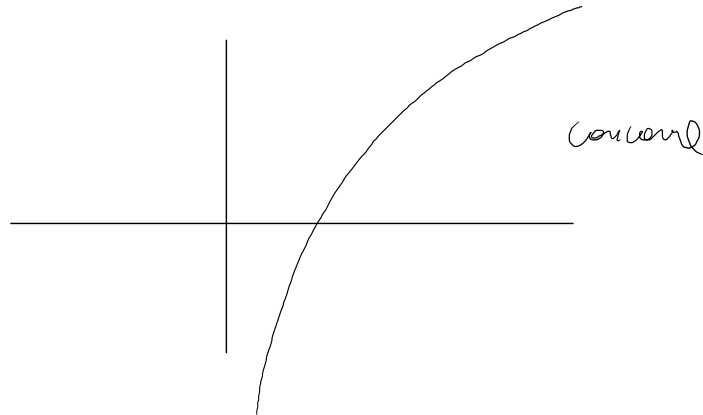
$$D = -e^{-x}$$

$$D^2 = e^{-x}$$

$$f(x) = \log x$$

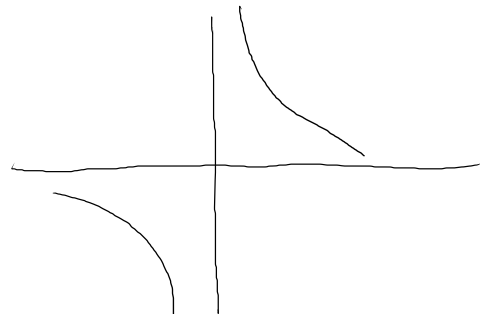
$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

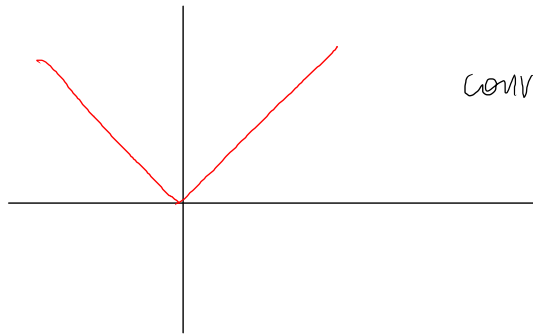


$$f(x) = \frac{1}{x}$$

è convesso su $]0, +\infty[$
 concavo su $] -\infty, 0[$



$$f(x) = |x|$$



convesso NON strettamente convesso

$$f(x) = \frac{1}{\log x}$$

$$x > 0$$

$$\text{dom } f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$f(x) < 0 \text{ su }]0, 1[\quad f(x) > 0 \text{ su }]1, +\infty[$$

$$f'(x) = -\frac{1}{(\log x)^2} \cdot \frac{1}{x} < 0 \quad \forall x \in \text{dom } f$$

~~f decrescente?~~

$$f \text{ è decrescente su }]0, 1[\text{ e su }]1, +\infty[$$

ma NON su dom f !

$$f''(x) = D \left[-(\log x)^{-2} \cdot x^{-1} \right] = - \left[-2(\log x)^{-3} \cdot x^{-2} - (\log x)^{-2} \cdot x^{-2} \right] = (\log x)^{-2} \cdot x^{-2} \left[1 + 2(\log x)^{-1} \right]$$

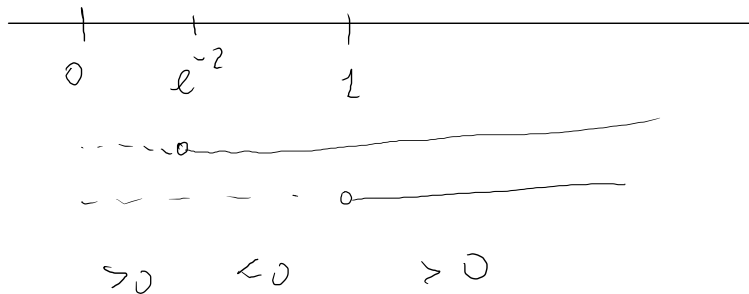
$$1 + \frac{2}{\log x} > 0$$

$$\frac{\log x + 2}{\log x} > 0$$

$$\frac{\log x + 2}{\log x} > 0$$

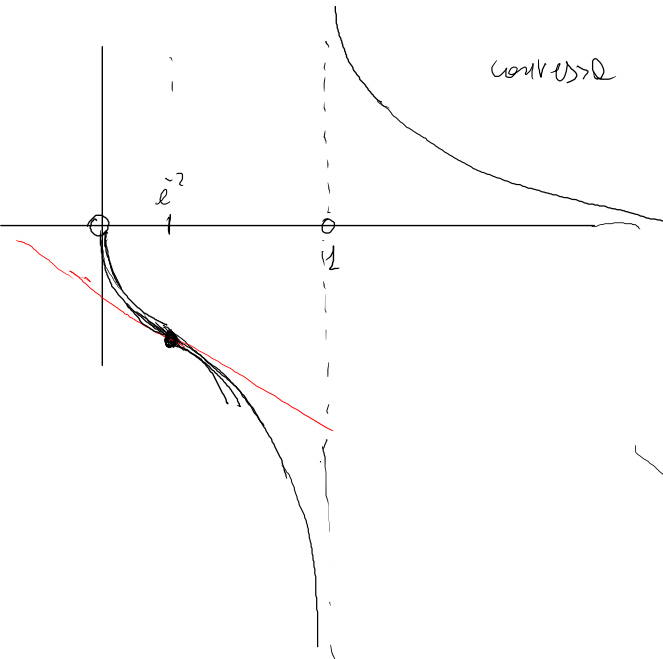
$$\log x + 2 > 0 \quad \text{u} \quad \log x > -2 \quad x > e^{-2}$$

$$\log x > 0 \quad \text{u} \quad x > 1$$



$$f''(x) > 0 \quad \text{u} \quad x \in]0, e^{-2}[\cup]1, +\infty[\quad f''(x) < 0 \quad \text{u} \quad x \in]e^{-2}, 1[$$

$$f''(e^{-2}) = 0$$

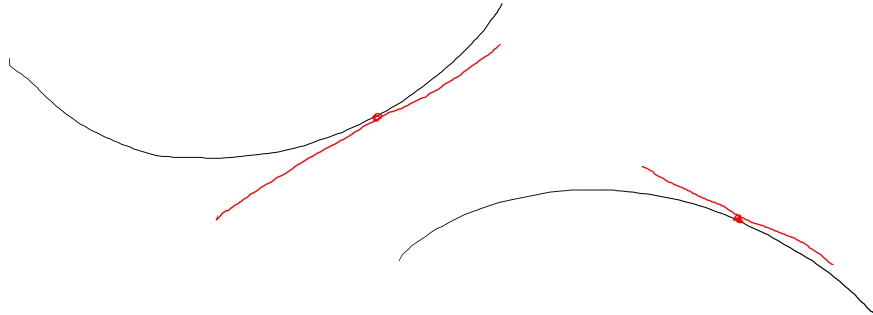


concavo

f concavo su $]0, e^{-2}]$

f convesso su $[e^{-2}, 1[$

f concavo su $]1, +\infty[$



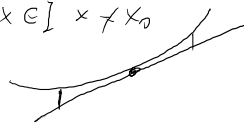
Teorema (convessità e retto tangente)

$I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, x_0 interno ad I ($\exists \delta > 0:]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset I$)

Sia $\tilde{f}_{[x_0]}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ l'approssimazione lineare di f in x_0 ;

allora, se f è strettamente convessa si ha $f(x) > \tilde{f}_{[x_0]}(x) \quad \forall x \in I, x \neq x_0$

se f è strettamente concava si ha $f(x) < \tilde{f}_{[x_0]}(x) \quad \forall x \in I, x \neq x_0$



Dim se f strettamente convessa, allora f' è strettamente crescente;

poniamo $g(x) = f(x) - \tilde{f}_{[x_0]}(x)$ $g'(x) = f'(x) - f'(x_0) < 0$ se $x < x_0$



$g'(x) = f'(x) - f'(x_0) \geq 0$ se $x > x_0$



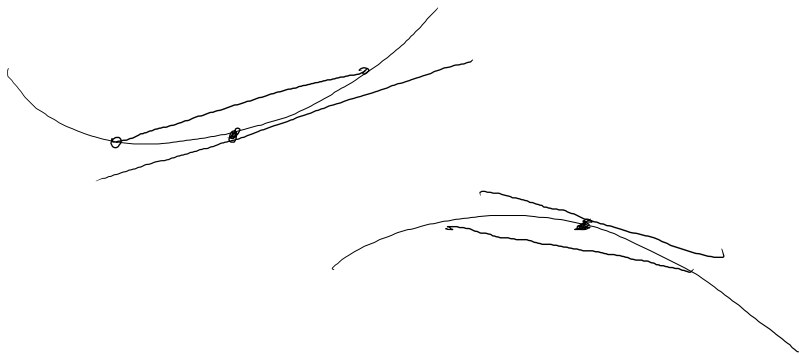
quindi x_0 è punto di minimo stretto per g , quindi $g(x) > g(x_0)$
 $\forall x \neq x_0$

$$g(x) > g(x_0) \quad \text{significato}$$

e quindi $f(x) > \hat{f}_{[x_0]}(x)$.

$$f(x) - \hat{\tilde{f}}_{[x_0]}(x) > f(x_0) - \hat{\tilde{f}}_{[x_0]}(x_0) = 0$$

" $f(x_0)$

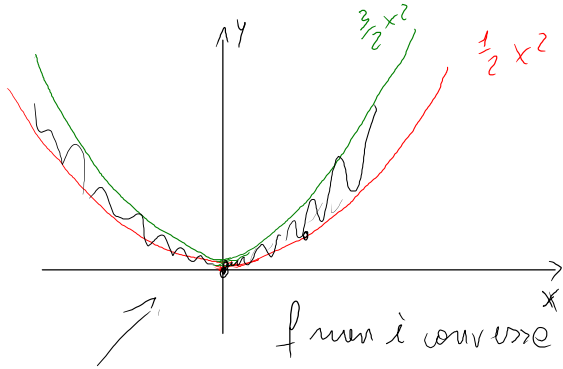
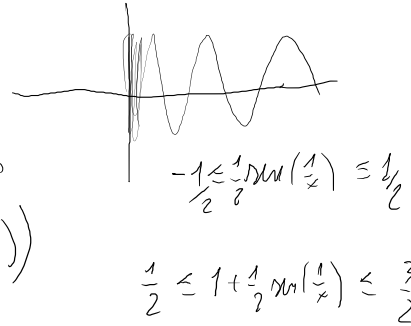


Sia f tale che $f(x) > \tilde{f}_{[x,0]}(x) \quad \forall x$
 $\Rightarrow f$ convesso? NO!

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{1}{2}x^2 \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f pari

$$x > 0 \quad x^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$



f è derivabile

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = 0$$

$$\hat{f}_{[0,0]}(x) = 0$$

$$\forall x \neq 0$$

$$f(x) > \hat{f}_{[0,0]}(x)$$

f non è convesso in alcun intorno di 0

Punti di flesso

$$S > 0$$

$f:]x_0 - S, x_0 + S[\rightarrow \mathbb{R}$ derivabile, sia $\tilde{f}_{[x_0]}$ l'approssimazione lineare di f in x_0

$\left[\tilde{f}_{[x_0]}(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \right]$. Diciamo che x_0 è un punto di flesso ascendente per f

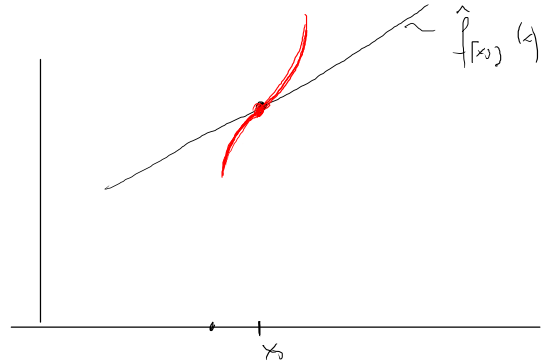
se $\forall x \in]x_0 - S, x_0[$ si ha $f(x) < \tilde{f}_{[x_0]}(x)$

e $\forall x \in]x_0, x_0 + S[$ si ha $f(x) > \tilde{f}_{[x_0]}(x)$

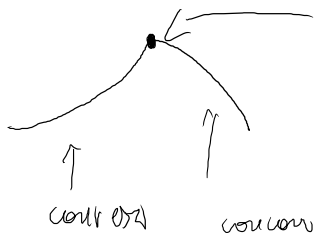
Diciamo che x_0 è punto di flesso discendente per f se

$\forall x \in]x_0 - S, x_0[$ si ha $f(x) > \tilde{f}_{[x_0]}(x)$

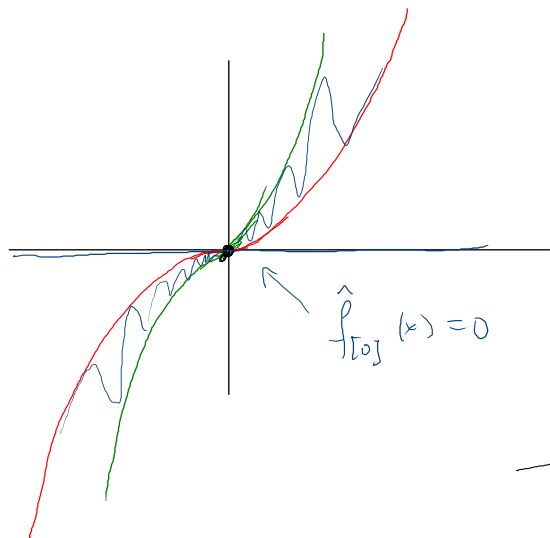
e $\forall x \in]x_0, x_0 + S[$ si ha $f(x) < \tilde{f}_{[x_0]}(x)$



Es:

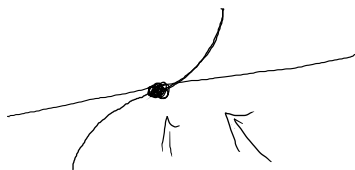


il punto non è un punto di flesso perché
è un punto in cui f non è derivabile



$$f(x) = \begin{cases} x^3 \left(1 + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{1}{|x|}\right) \right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

0 è un punto di flesso ^{oscillatorio} perché c'è
l'"ottovolturno dello zero"



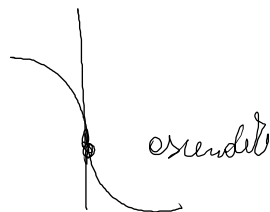
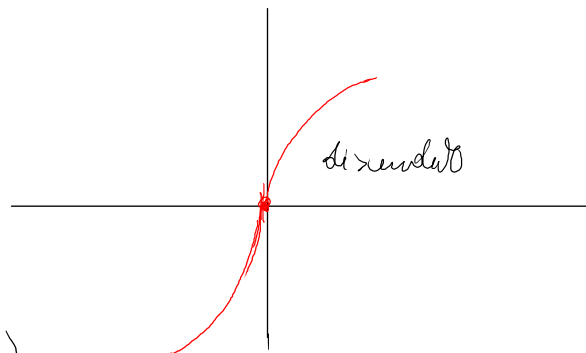
$$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad 0 \text{ è punto di flesso?}$$

NO, perché f non è derivabile.

si dice in questi casi

(vale a dire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ oppure $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$)

che x_0 è un "punto di flesso a tangente verticale"



Teorema

$$f:]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}$$

Sia f due volte derivabile in x_0 , sia x_0 punto di flesso, allora $f''(x_0) = 0$.

Dim Per il teorema di Taylor ^{di ordine 1 resto} con errore nello forma di Peano si ha

$$f(x) = \overbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}^{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)} + \underbrace{\left[\frac{1}{2} f''(x_0) + \varphi(x) \right]}_{\text{errore}} (x-x_0)^2 \quad \text{con } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$$

Sia $f''(x_0) < 0$; allora esiste un intorno U di x_0 tale che $|\varphi(x)| < \frac{1}{2} |f''(x_0)|$

non allora $\left[\frac{1}{2} f''(x_0) + \varphi(x) \right] (x-x_0)^2 < 0 \quad \forall x \in U, x \neq x_0$

allora $f(x) - \tilde{f}_{[x_0]}(x) < 0 \quad \forall x \in U, x \neq x_0$

quindi x_0 non può essere di flesso. Se $f''(x_0) > 0$ lo stesso ragionamento è lo stesso.



es: $f(x) = x^4$ $f''(0) = 0$ ma 0 non è punto di flesso

Teste / Test dello derivato secondo per i punti critici

$f:]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ due volte derivabile; sia x_0 punto critico ($f'(x_0) = 0$)

Allora, se $f''(x_0) > 0$ x_0 è punto di minimo relativo stretto per f 
se $f''(x_0) < 0$ x_0 è punto di massimo relativo stretto per f 

Dim Usiamo lo sviluppo di Taylor di ordine 1 con resto di Peano

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{=0} (x-x_0) + \left[\frac{1}{2} f''(x_0) + \varphi(x) \right] (x-x_0)^2 \quad \text{con } \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0.$$

$$\underbrace{f(x) - f(x_0)}_{=0} = \underbrace{\left[\frac{1}{2} f''(x_0) + \varphi(x) \right]}_{>0} (x-x_0)^2$$

se $f''(x_0) > 0$ esiste un intorno U di x_0 dove
 $\frac{1}{2} f''(x_0) + \varphi(x) > 0 \quad \forall x \in U$

quindi $\forall x \in U \quad x \neq x_0 \quad f(x) - f(x_0) > 0$

quindi x_0 è punto di minimo stretto

$$\text{se } f''(x_0) < 0$$

$$f(x) - f(x_0) = \underbrace{\left[\frac{1}{2} f''(x_0) + \varphi(x) \right]}_{< 0 \quad \forall x \in U} (x - x_0)^2 < 0 \quad \forall x \in U \quad x \neq x_0$$

$f(x) < f(x_0)$ x_0 è punto di massimo stretto



Se $f''(x_0) = 0$ tutto può accadere



$f(x) = x^4$

$-x^4$