ALGORITMI E STRUTTURE DATI

ALBERI SPLAY

- Gli alberi binari di ricerca possono avere il problema che, a seconda dell'ordine di inserimento, possono avere profondità lineare
- Come primo esempio di albero che si modifica vediamo gli alberi splay (splay tree)
- Ideati nel 1985 da Sleator e Tarjan
- Ci serviranno per introdurre il concetto di rotazione per modificare la forma degli alberi

ALBERI SPLAY

- L'idea di base è di spostare gli elementi che cerchiamo alla radice dell'albero
- L'effetto è che tutti gli elementi cercati di recente vengono a trovarsi vicino alla radice
- Questo non mantiene necessariamente l'albero bilanciato: il caso peggiore è ancora $O(n)$
- Ci sono però una serie di altri vantaggi (e.g., costo ammortizzato di una sequenza di operazioni)

ROTAZIONI

ROTAZIONI

- Ruotare un nodo è l'operazione che ci permette di scambiare la posizione di un nodo e del suo figlio sinistro o destro

ROTAZIONI

- Ruotare un nodo è l'operazione che ci permette di scambiare la posizione di un nodo e del suo figlio sinistro o destro

- Rotazione a sinistra di x: il nodo x viene sostituito dal suo figlio destro e ne diventa il figlio sinistro

ROTAZIONI

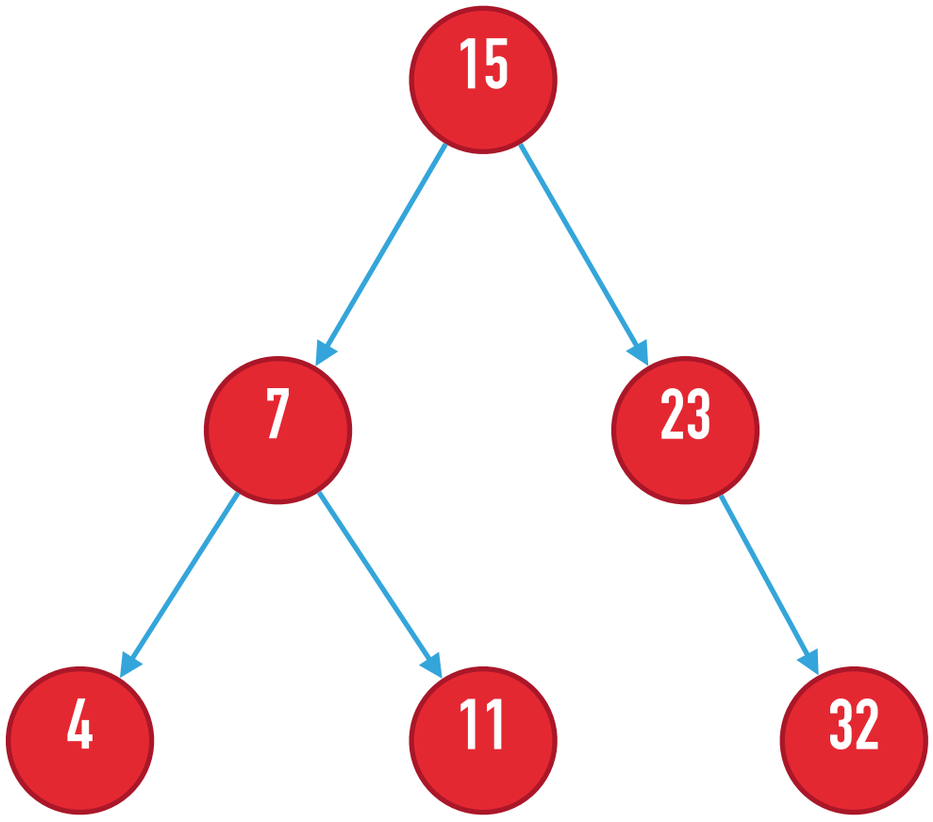
- Ruotare un nodo è l'operazione che ci permette di scambiare la posizione di un nodo e del suo figlio sinistro o destro

- Rotazione a sinistra di x: il nodo x viene sostituito dal suo figlio destro e ne diventa il figlio sinistro

- Rotazione a destra di x: il nodo x viene sostituito dal suo figlio sinistro e ne diventa il figlio destro

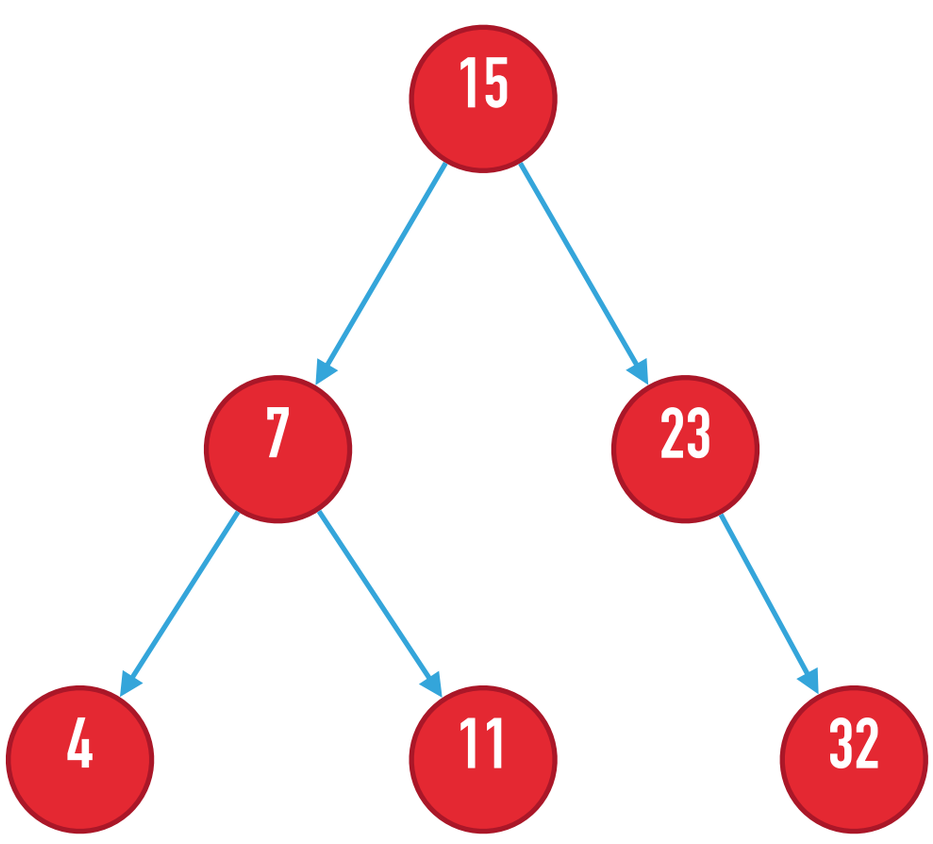
ROTAZIONE A SINISTRA

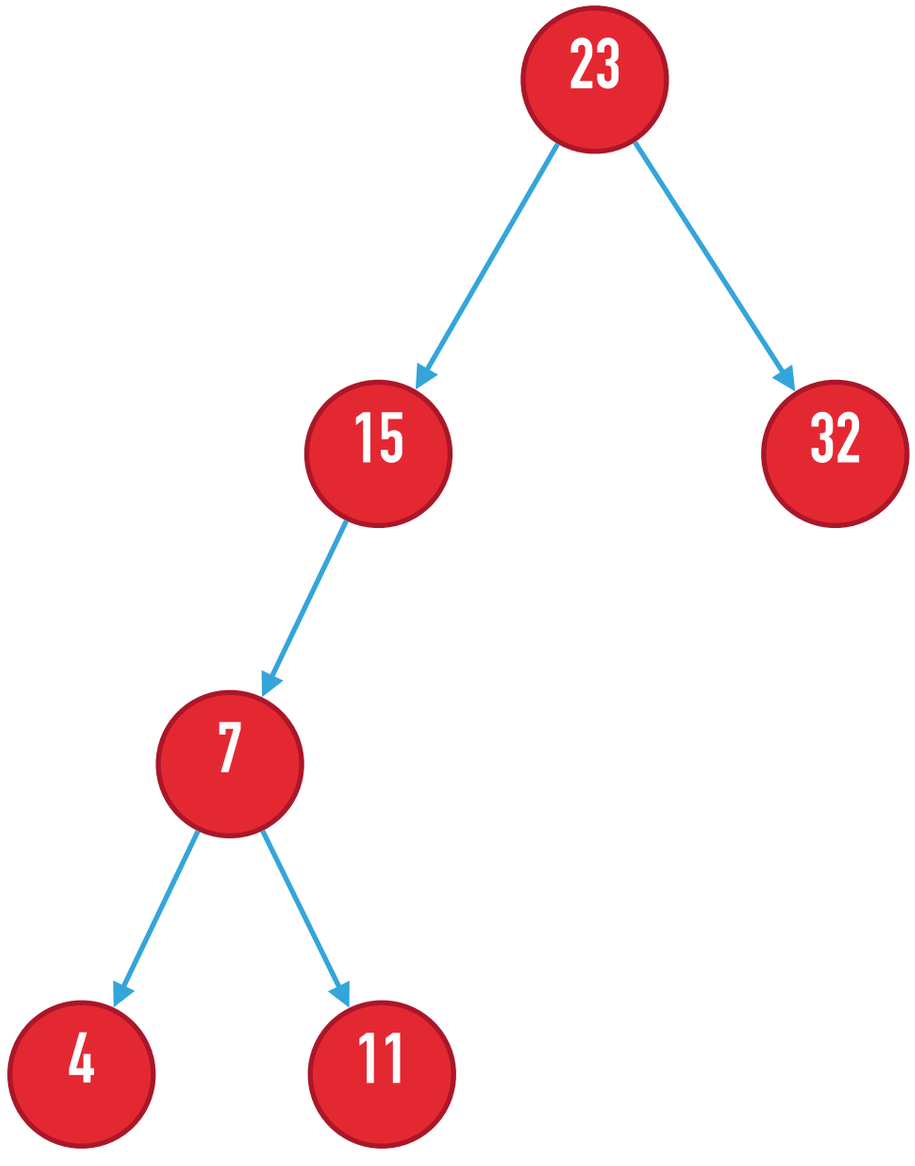
Vogliamo ruotare a sinistra “15”



ROTAZIONE A SINISTRA

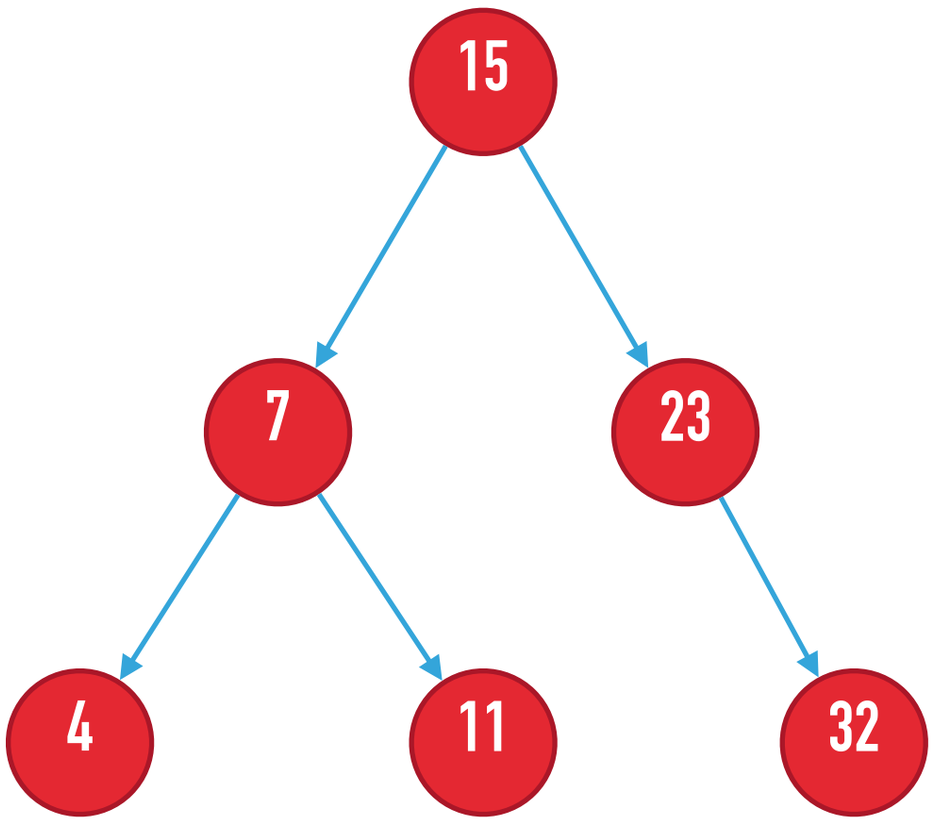
Vogliamo ruotare a sinistra “15”





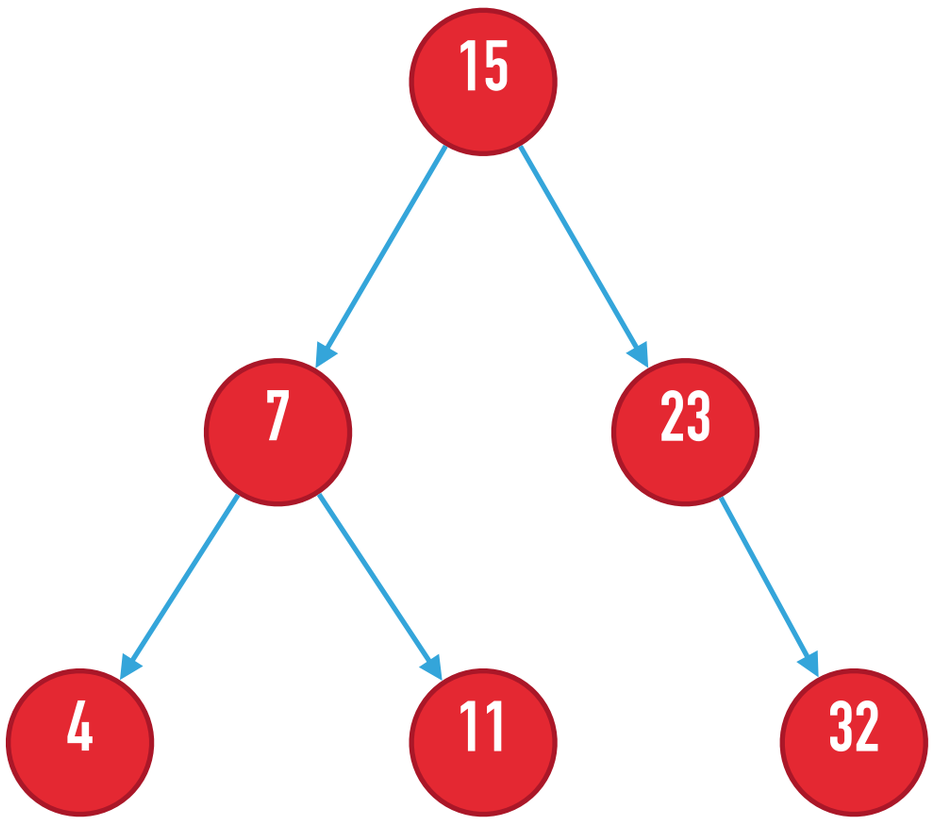
ROTAZIONE A DESTRA

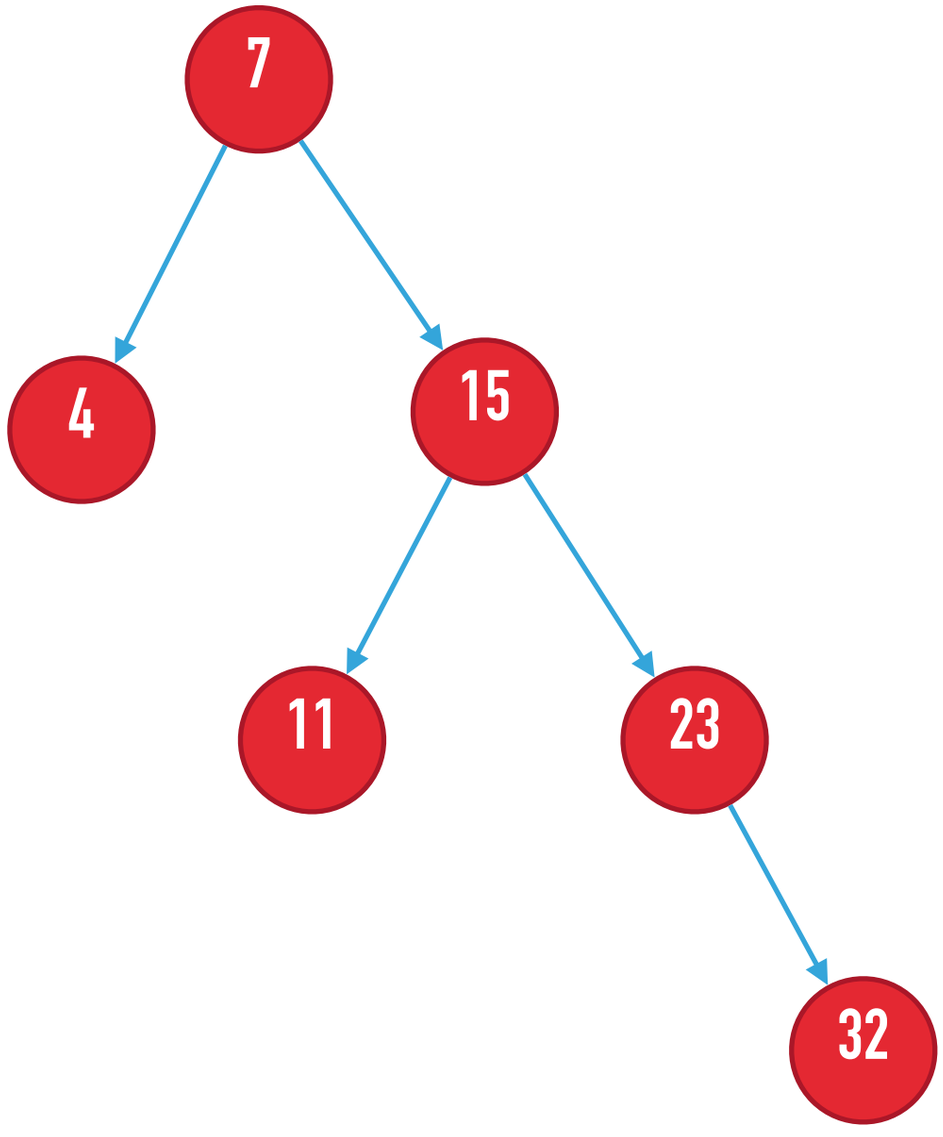
Vogliamo ruotare a destra “15”



ROTAZIONE A DESTRA

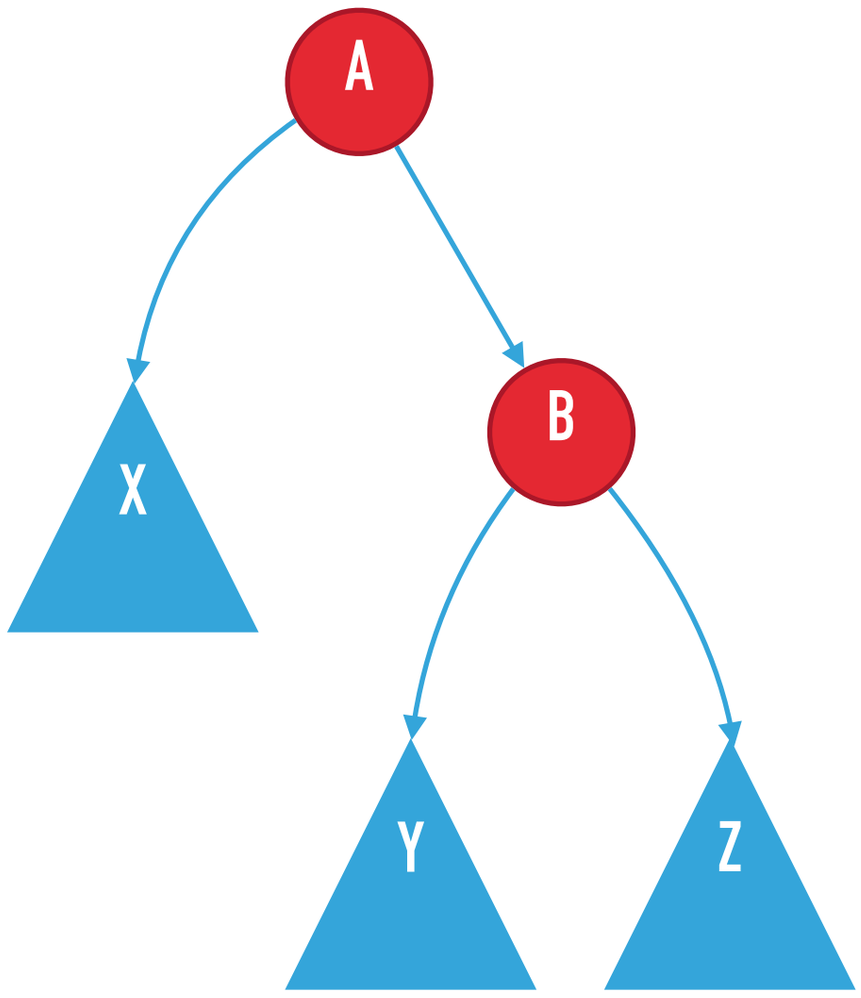
Vogliamo ruotare a destra “15”





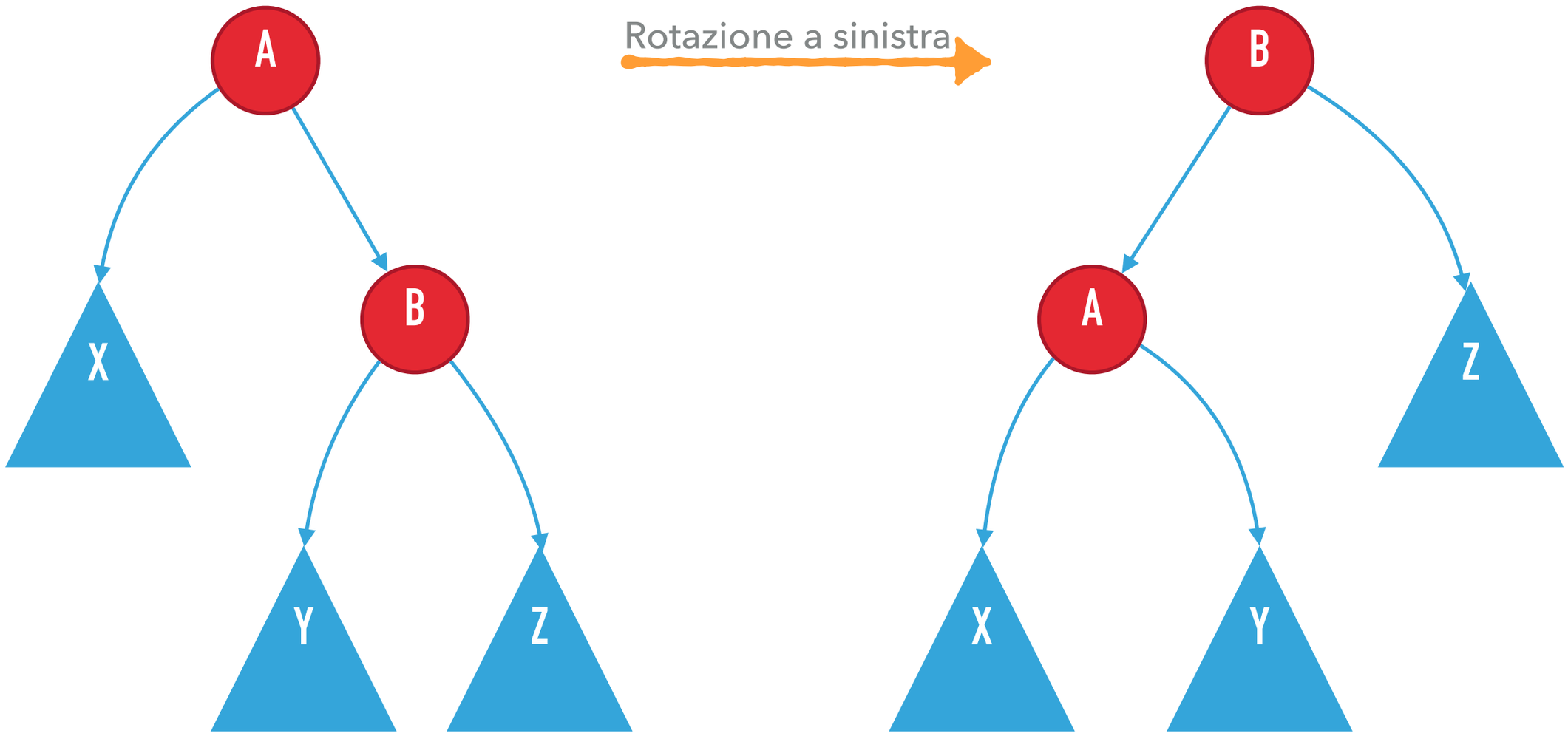
ROTAZIONE

Astraiamo e vediamo come la rotazione agisce su due nodi generici



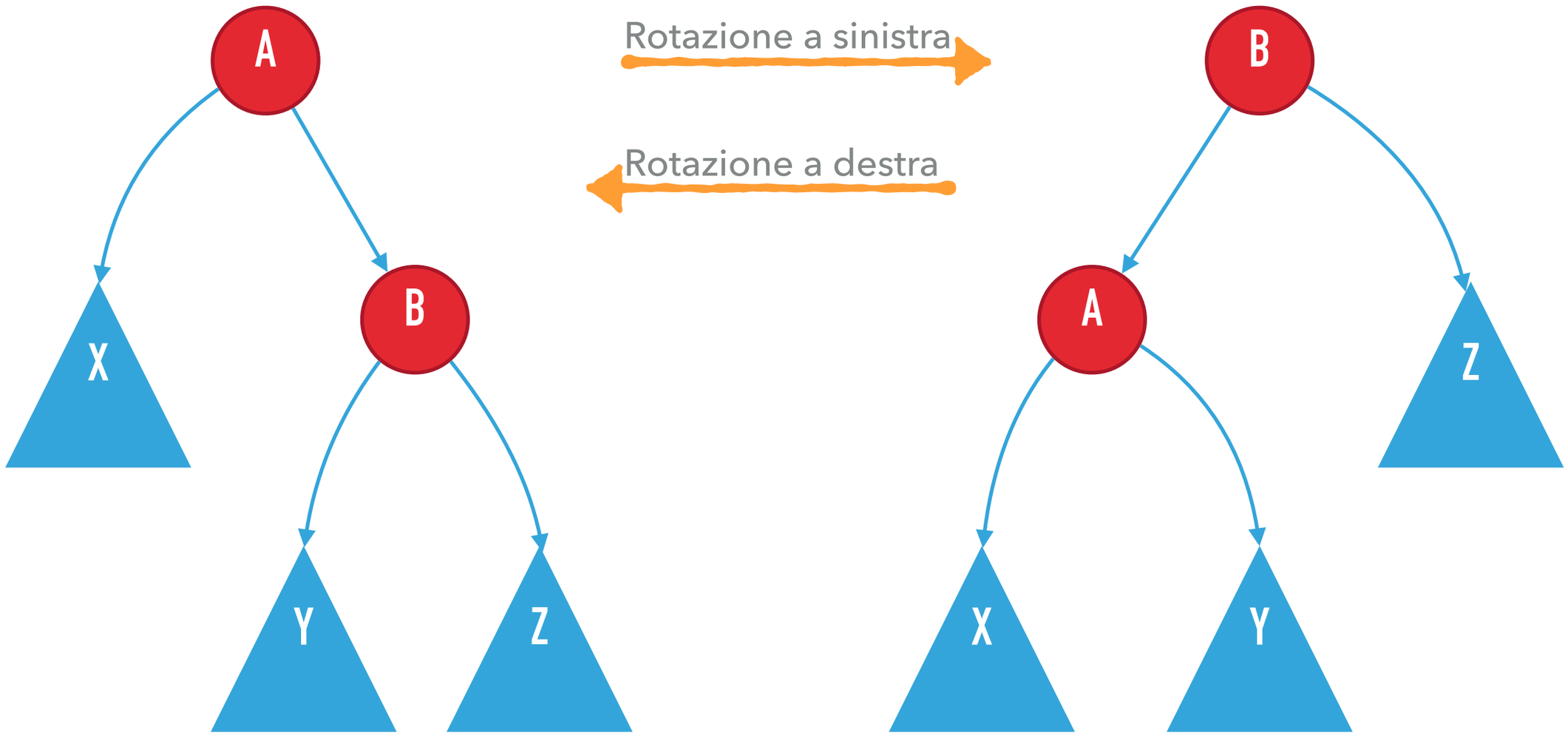
ROTAZIONE

Astraiamo e vediamo come la rotazione agisce su due nodi generici



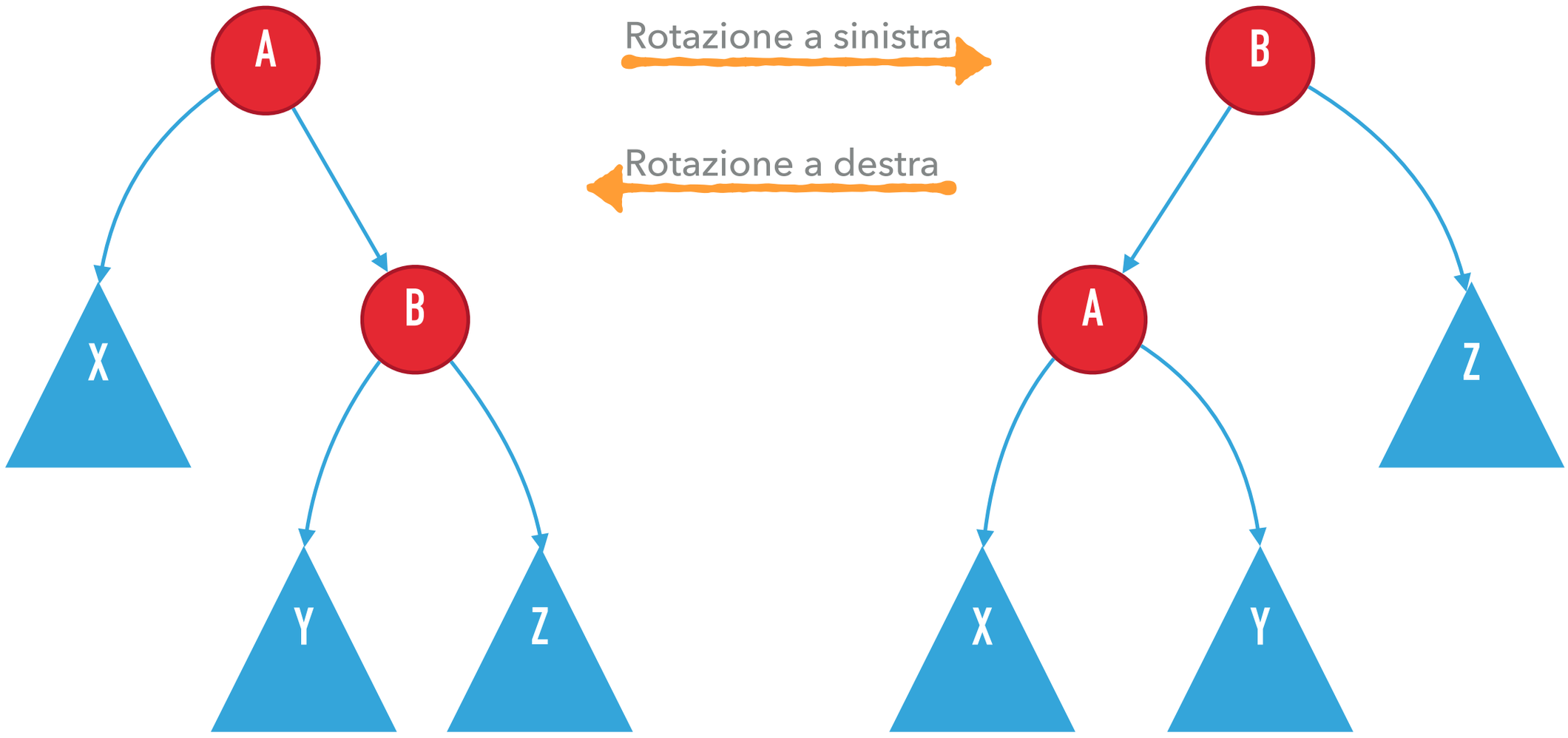
ROTAZIONE

Astraiamo e vediamo come la rotazione agisce su due nodi generici



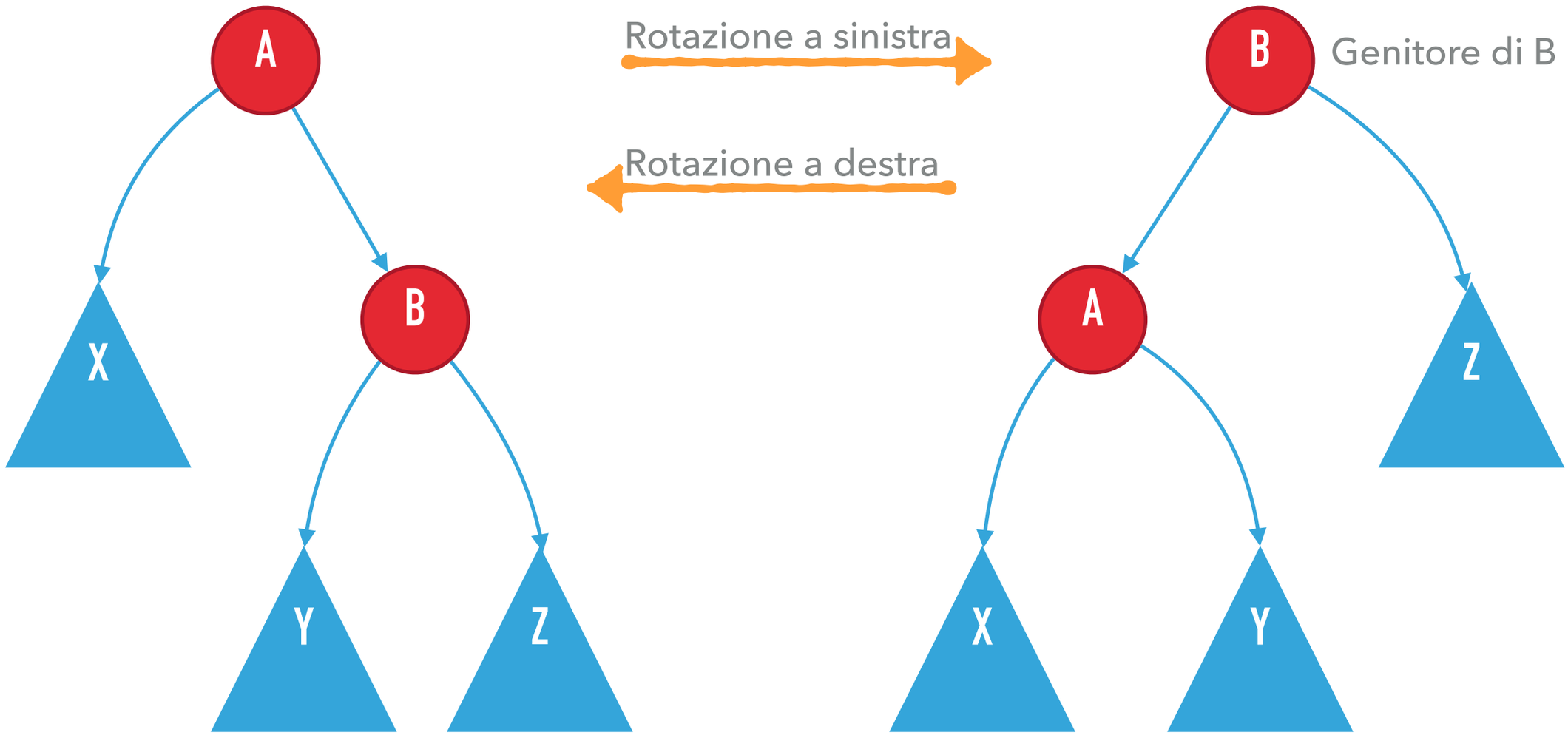
ROTAZIONE: COSA BISOGNA MODIFICARE

Cosa dobbiamo modificare nei vari nodi per effettuare la rotazione?



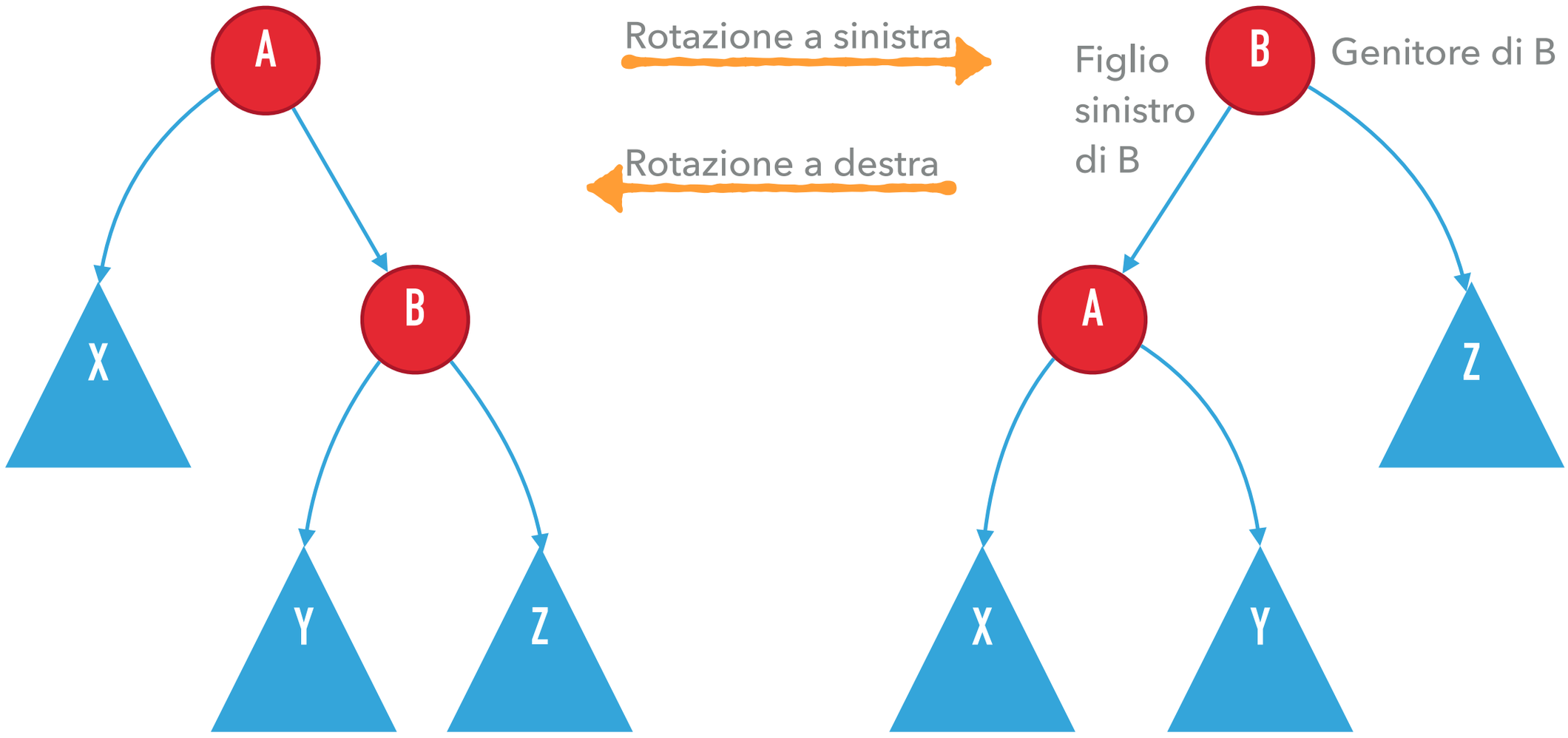
ROTAZIONE: COSA BISOGNA MODIFICARE

Cosa dobbiamo modificare nei vari nodi per effettuare la rotazione?



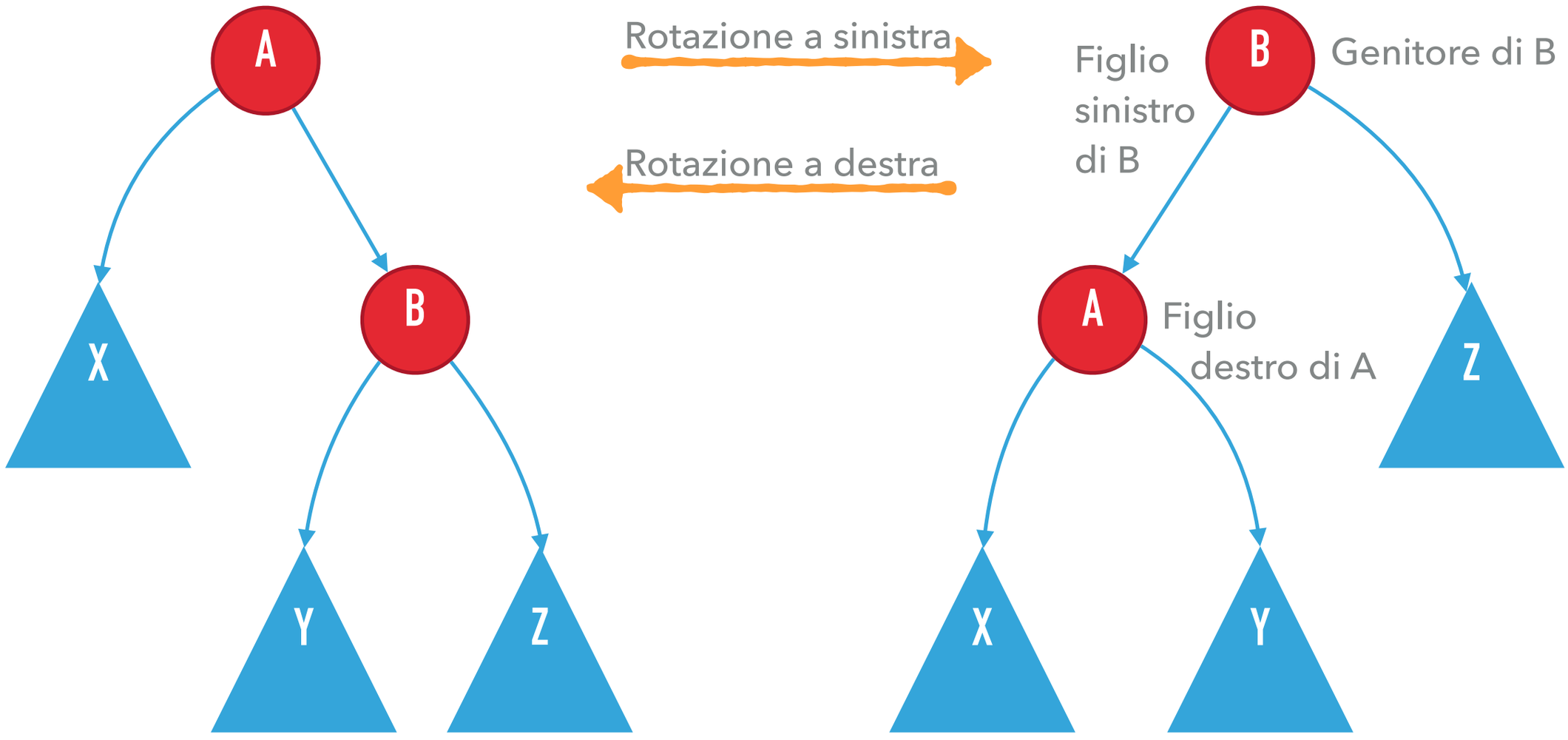
ROTAZIONE: COSA BISOGNA MODIFICARE

Cosa dobbiamo modificare nei vari nodi per effettuare la rotazione?



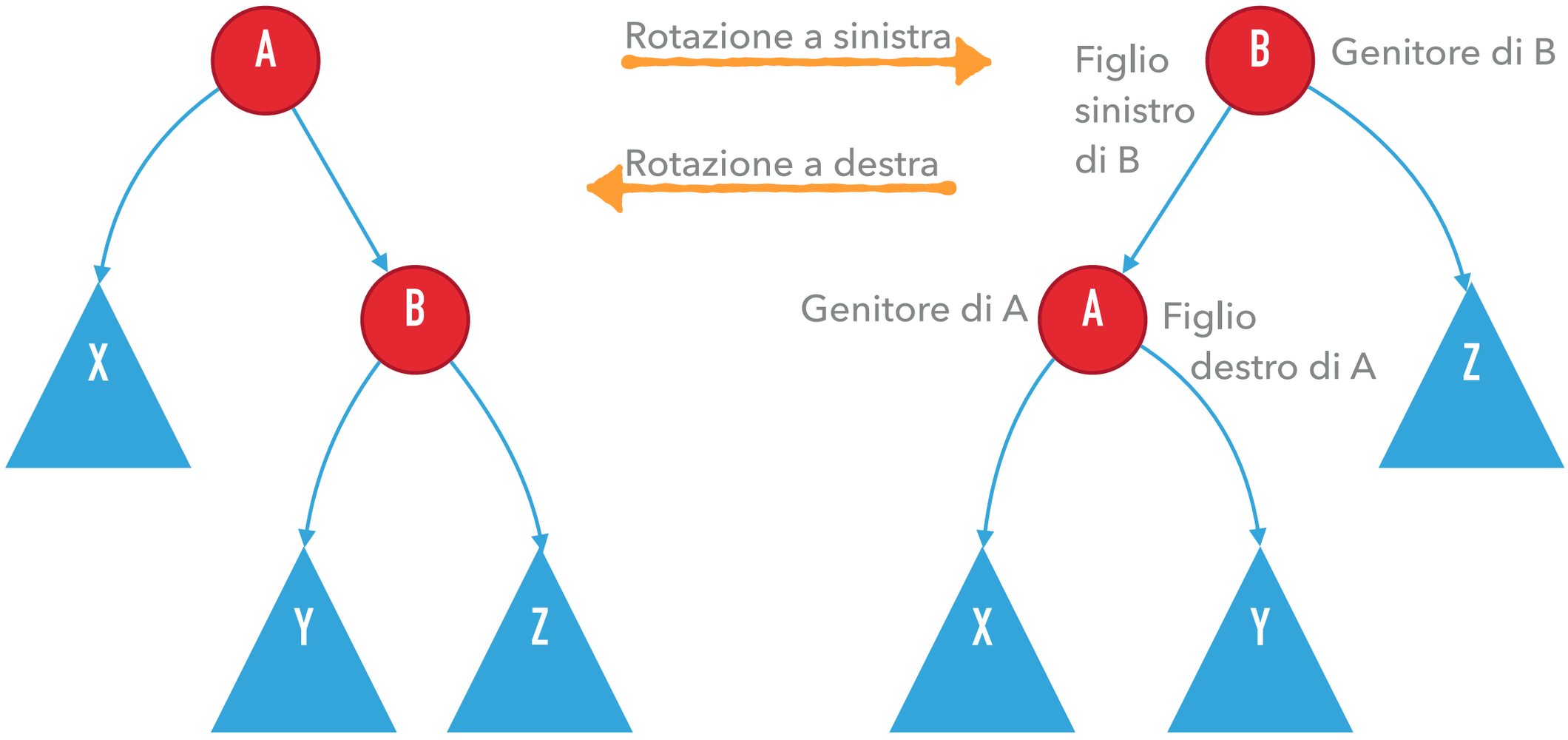
ROTAZIONE: COSA BISOGNA MODIFICARE

Cosa dobbiamo modificare nei vari nodi per effettuare la rotazione?



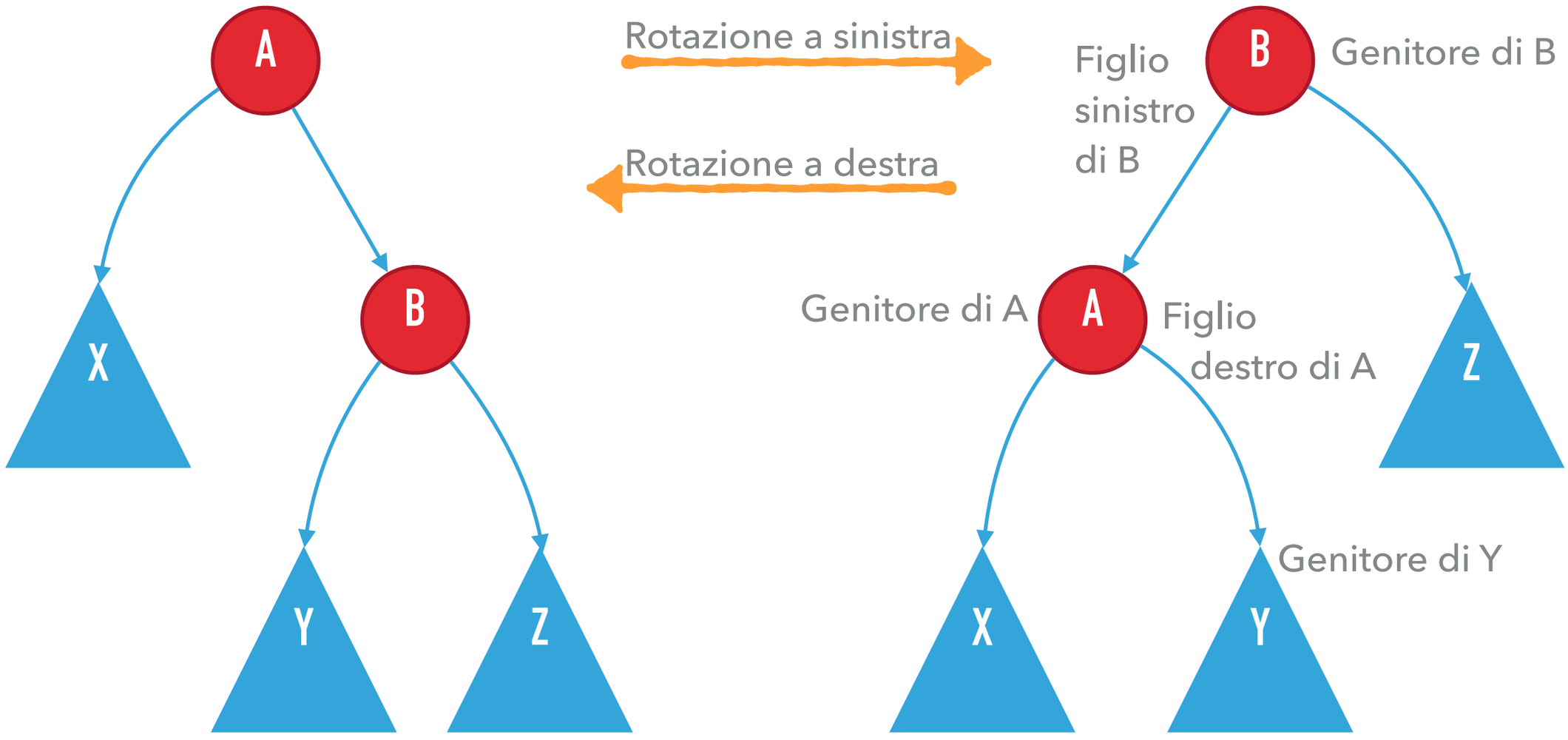
ROTAZIONE: COSA BISOGNA MODIFICARE

Cosa dobbiamo modificare nei vari nodi per effettuare la rotazione?



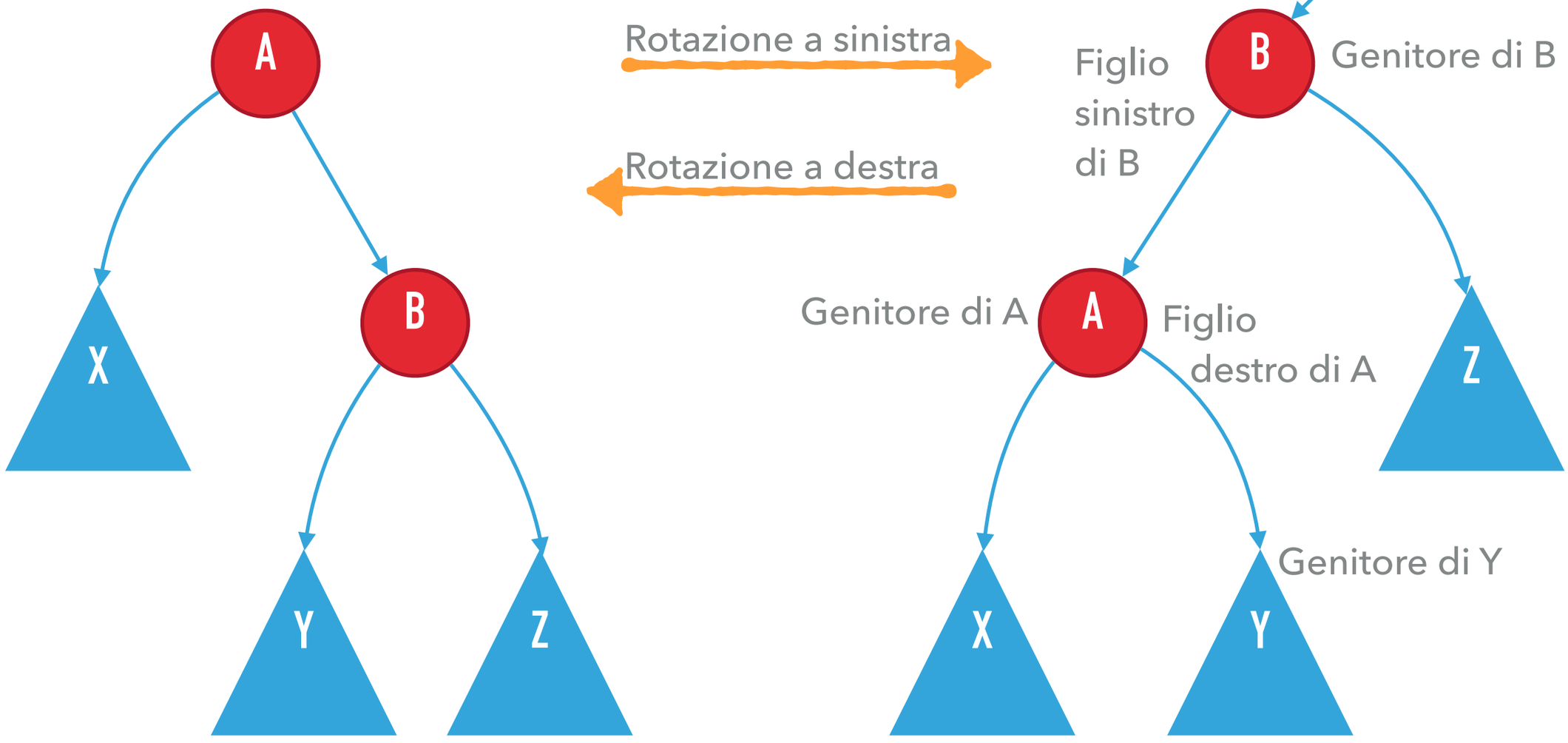
ROTAZIONE: COSA BISOGNA MODIFICARE

Cosa dobbiamo modificare nei vari nodi per effettuare la rotazione?



ROTAZIONE: COSA BISOGNA MODIFICARE

Cosa dobbiamo modificare nei vari nodi per effettuare la rotazione?



ROTAZIONI

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left
- if a.right is not None:

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left
- if a.right is not None:
  - a.right.parent = a

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left
- if a.right is not None:
  - a.right.parent = a
- b.left = a

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left
- if a.right is not None:
  - a.right.parent = a
- b.left = a
- # con queste operazioni abbiamo messo il figlio sinistro di b come figlio destro di a, dobbiamo ancora sistemare i genitori di a e b

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left
- if a.right is not None:
  - a.right.parent = a
- b.left = a
- # con queste operazioni abbiamo messo il figlio sinistro di b come figlio destro di a, dobbiamo ancora sistemare i genitori di a e b
- if a.parent is not None: # sistemiamo il genitore di a

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left
- if a.right is not None:
  - a.right.parent = a
- b.left = a
- # con queste operazioni abbiamo messo il figlio sinistro di b come figlio destro di a, dobbiamo ancora sistemare i genitori di a e b
- if a.parent is not None: # sistemiamo il genitore di a
  - if a.parent.left is a: # nel caso a fosse figlio sinistro

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left
- if a.right is not None:
  - a.right.parent = a
- b.left = a
- # con queste operazioni abbiamo messo il figlio sinistro di b come figlio destro di a, dobbiamo ancora sistemare i genitori di a e b
- if a.parent is not None: # sistemiamo il genitore di a
  - if a.parent.left is a: # nel caso a fosse figlio sinistro
    - a.parent.left = b

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left
- if a.right is not None:
  - a.right.parent = a
- b.left = a
- # con queste operazioni abbiamo messo il figlio sinistro di b come figlio destro di a, dobbiamo ancora sistemare i genitori di a e b
- if a.parent is not None: # sistemiamo il genitore di a
  - if a.parent.left is a: # nel caso a fosse figlio sinistro
    - a.parent.left = b
  - else # nel caso a fosse figlio destro

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left
- if a.right is not None:
  - a.right.parent = a
- b.left = a
- # con queste operazioni abbiamo messo il figlio sinistro di b come figlio destro di a, dobbiamo ancora sistemare i genitori di a e b
- if a.parent is not None: # sistemiamo il genitore di a
  - if a.parent.left is a: # nel caso a fosse figlio sinistro
    - a.parent.left = b
  - else # nel caso a fosse figlio destro
    - a.parent.right = b

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left
- if a.right is not None:
  - a.right.parent = a
- b.left = a
- # con queste operazioni abbiamo messo il figlio sinistro di b come figlio destro di a, dobbiamo ancora sistemare i genitori di a e b
- if a.parent is not None: # sistemiamo il genitore di a
  - if a.parent.left is a: # nel caso a fosse figlio sinistro
    - a.parent.left = b
  - else # nel caso a fosse figlio destro
    - a.parent.right = b
- b.parent = a.parent

ROTAZIONI

- Parametri: nodo a
- b = a.right # nodo che prenderà il posto di a
- a.right = b.left
- if a.right is not None:
  - a.right.parent = a
- b.left = a
- # con queste operazioni abbiamo messo il figlio sinistro di b come figlio destro di a, dobbiamo ancora sistemare i genitori di a e b
- if a.parent is not None: # sistemiamo il genitore di a
  - if a.parent.left is a: # nel caso a fosse figlio sinistro
    - a.parent.left = b
  - else # nel caso a fosse figlio destro
    - a.parent.right = b
- b.parent = a.parent
- a.parent = b

ROTAZIONI

ROTAZIONI

- Ogni rotazione richiede tempo costante
- Ci permette di “muovere” un nodo lungo l’albero facendolo salire o scendere tramite una serie di rotazioni
- Negli alberi Splay useremo le rotazioni per far risalire un nodo fino a farlo diventare la radice

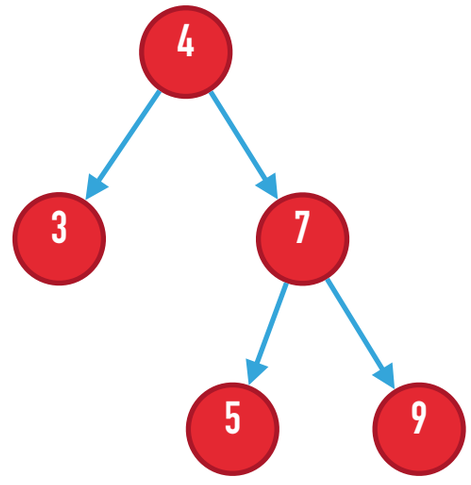
ROTAZIONI

- Ogni rotazione richiede tempo costante
- Ci permette di “muovere” un nodo lungo l’albero facendolo salire o scendere tramite una serie di rotazioni
- Negli alberi Splay useremo le rotazioni per far risalire un nodo fino a farlo diventare la radice
- In altri alberi che garantiscono il bilanciamento (come gli alberi AVL) le rotazioni sono usate per bilanciare dopo ogni inserimento o rimozione

QUIZ: ROTAZIONI

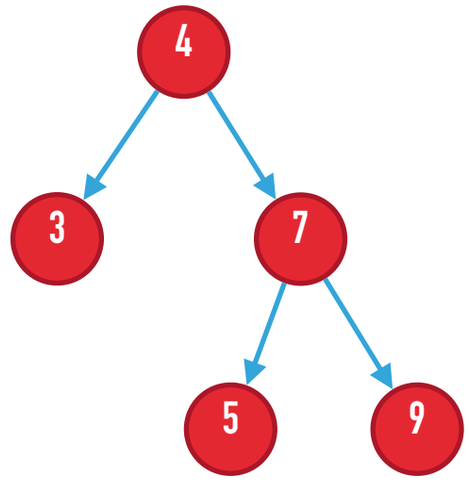
Supponiamo di avere il seguente albero binario:

Quale è il risultato di ruotare a sinistra “4”?



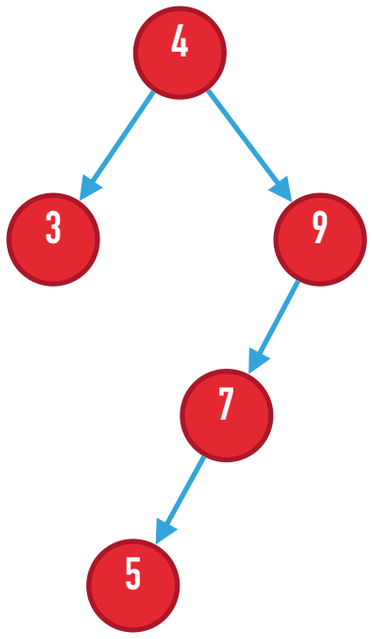
QUIZ: ROTAZIONI

Supponiamo di avere il seguente albero binario:



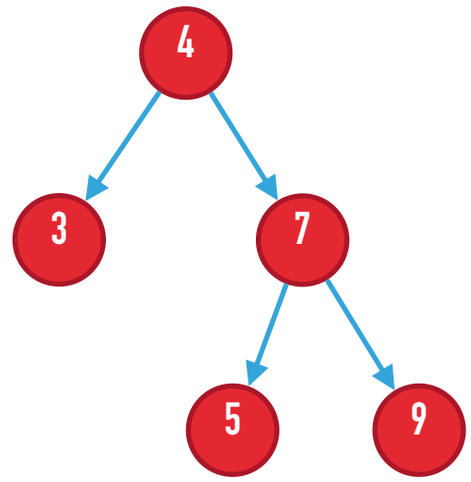
Quale è il risultato di ruotare a sinistra “4”?

A)



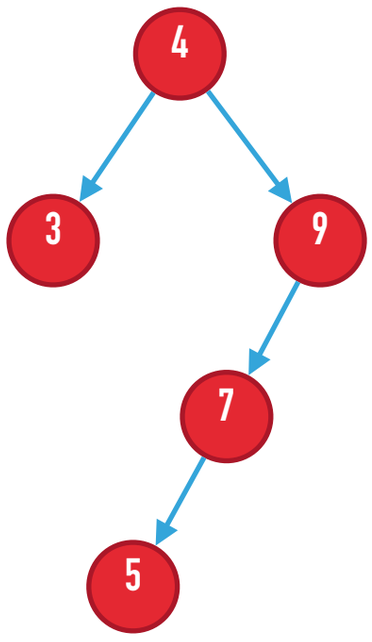
QUIZ: ROTAZIONI

Supponiamo di avere il seguente albero binario:

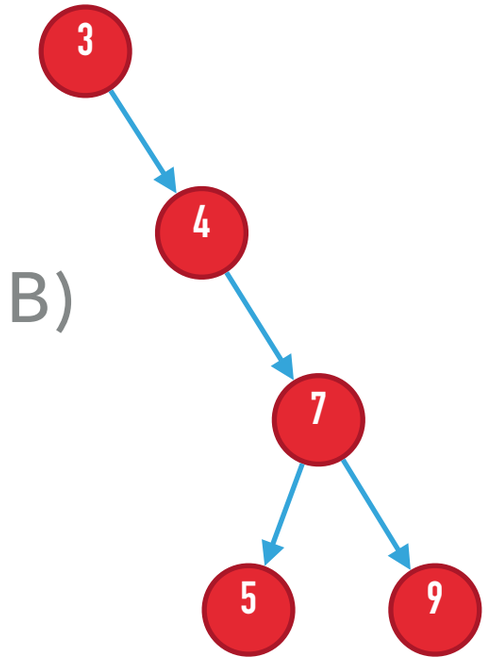


Quale è il risultato di ruotare a sinistra “4”?

A)

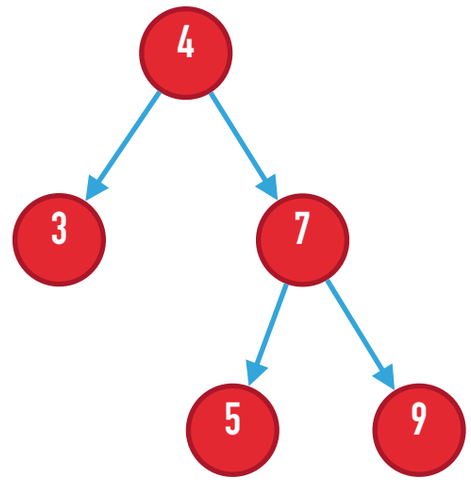


B)



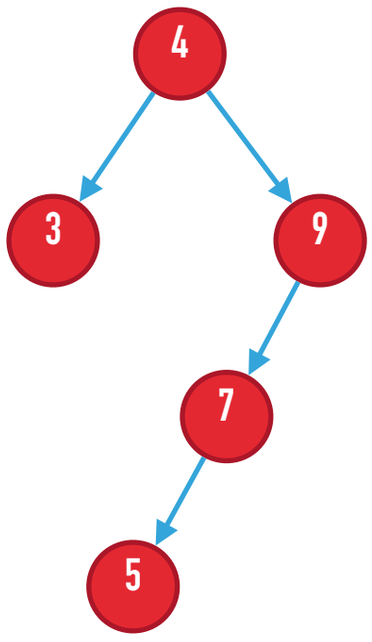
QUIZ: ROTAZIONI

Supponiamo di avere il seguente albero binario:

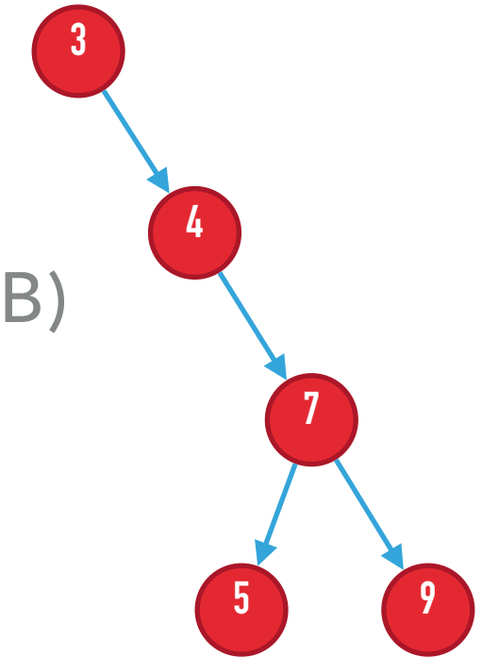


Quale è il risultato di ruotare a sinistra “4”?

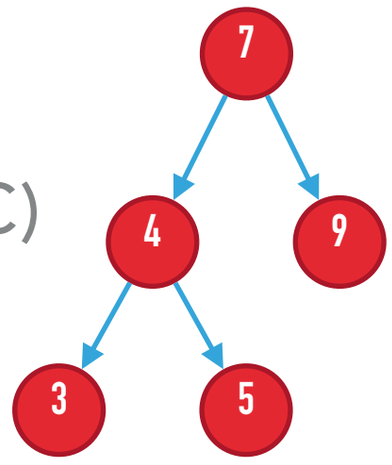
A)



B)

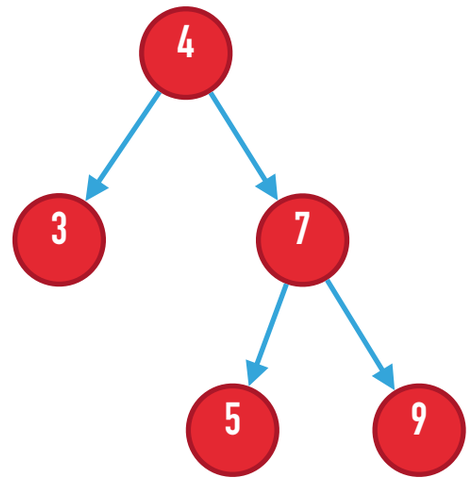


C)



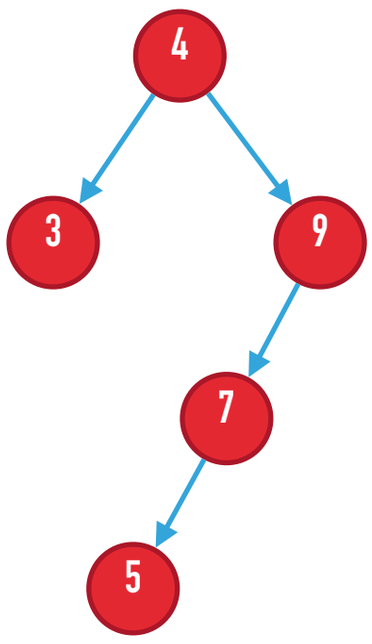
QUIZ: ROTAZIONI

Supponiamo di avere il seguente albero binario:

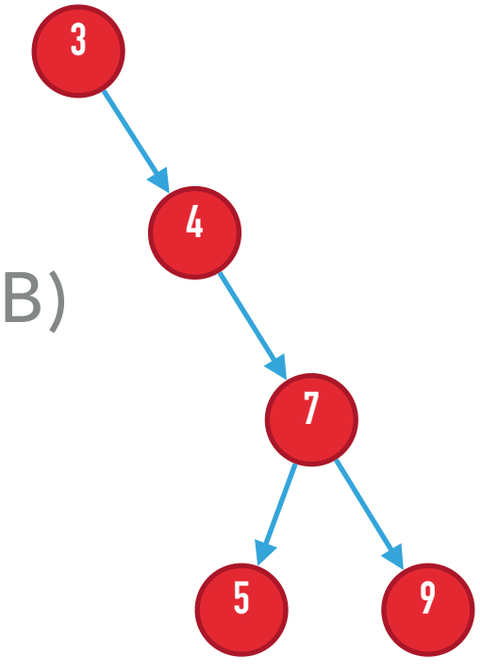


Quale è il risultato di ruotare a sinistra “4”?

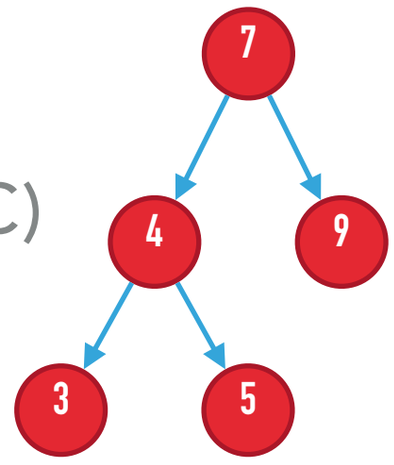
A)



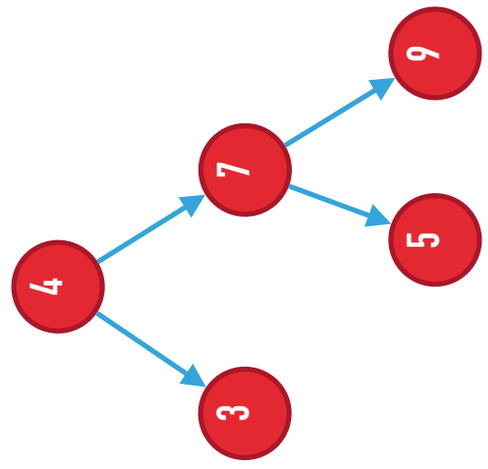
B)



C)



D)



ALBERI SPLAY

ALBERI SPLAY

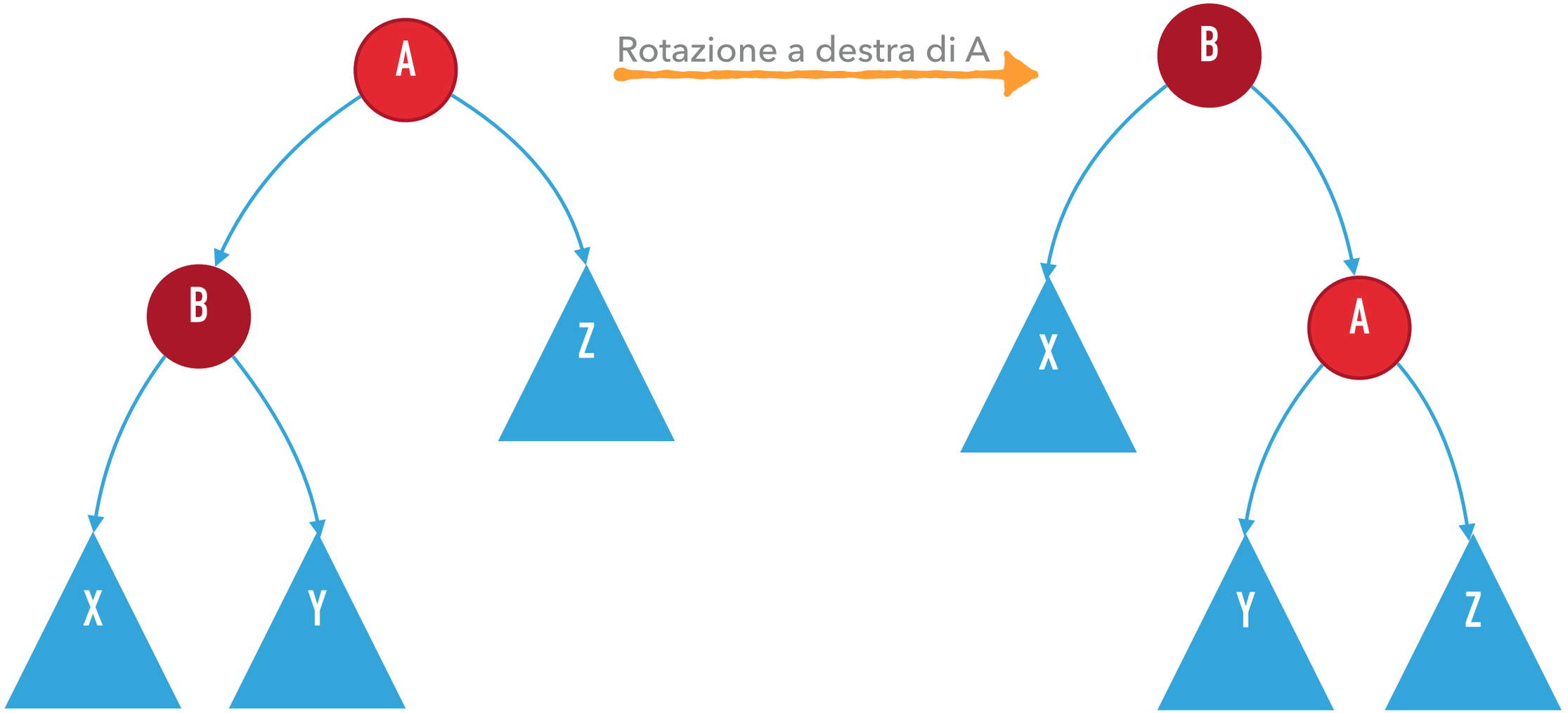
- Ogni volta che cerchiamo un elemento nell'albero chiamiamo l'operazione di "splay" o "muovi alla radice" che sposta l'elemento cercato alla radice dell'albero

ALBERI SPLAY

- Ogni volta che cerchiamo un elemento nell'albero chiamiamo l'operazione di "splay" o "muovi alla radice" che sposta l'elemento cercato alla radice dell'albero
- Questo viene fatto con rotazioni secondo tre casi:
  - Zig.
  - Zig zig.
  - Zig zag.

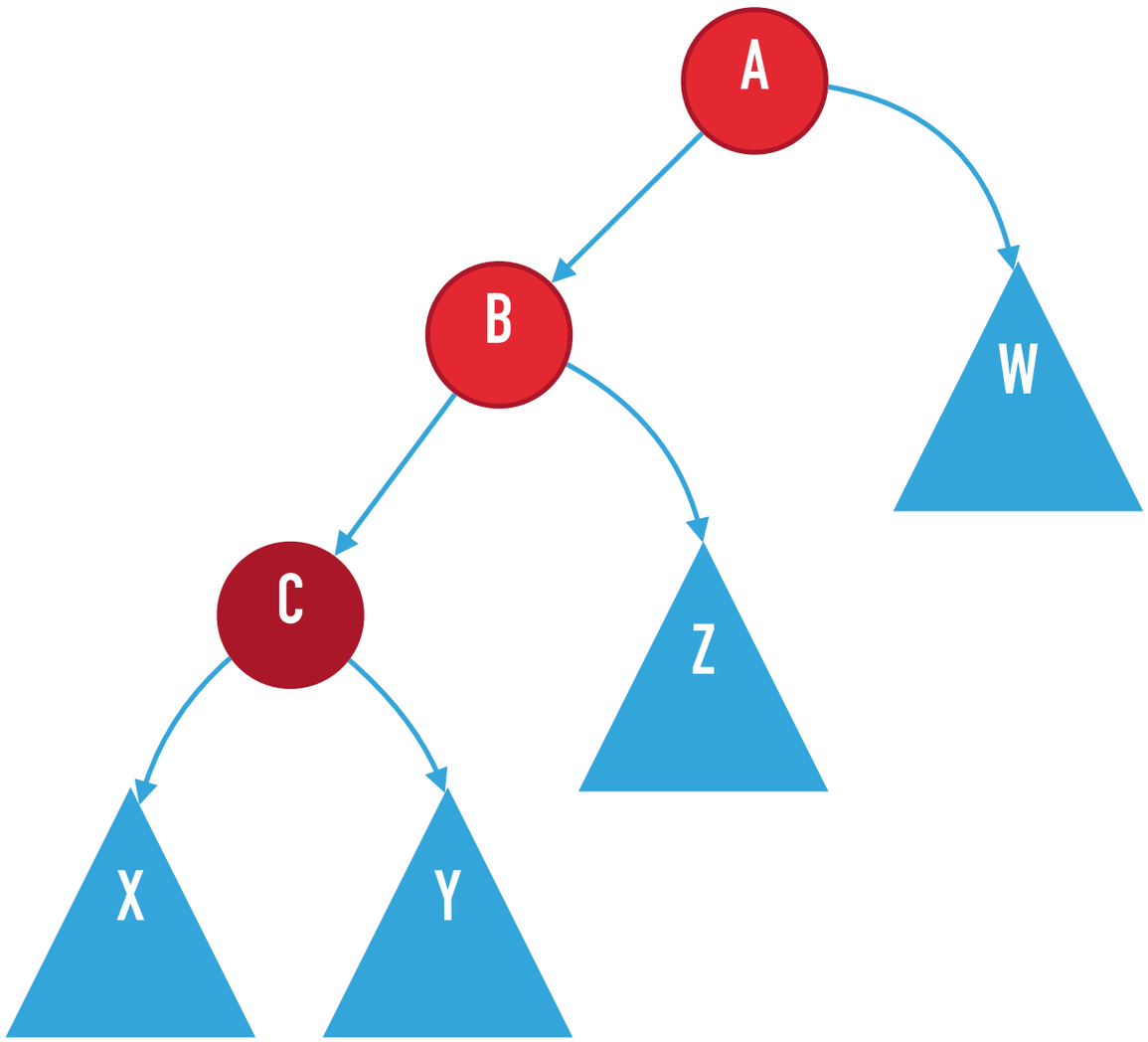
CASO ZIG

Il nodo da muovere è figlio sinistro della radice



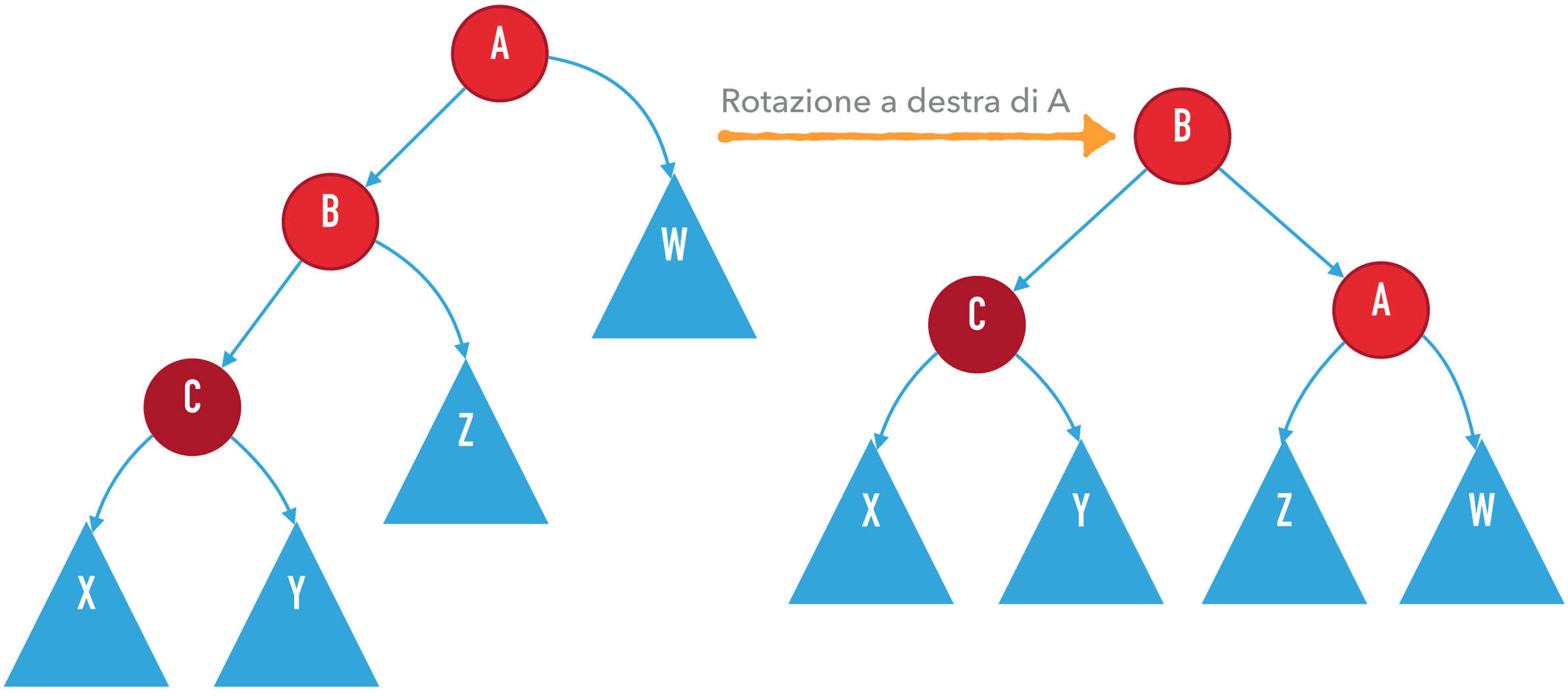
CASO ZIG ZIG

Il nodo da muovere è figlio sinistro di un nodo che è a sua volta figlio sinistro



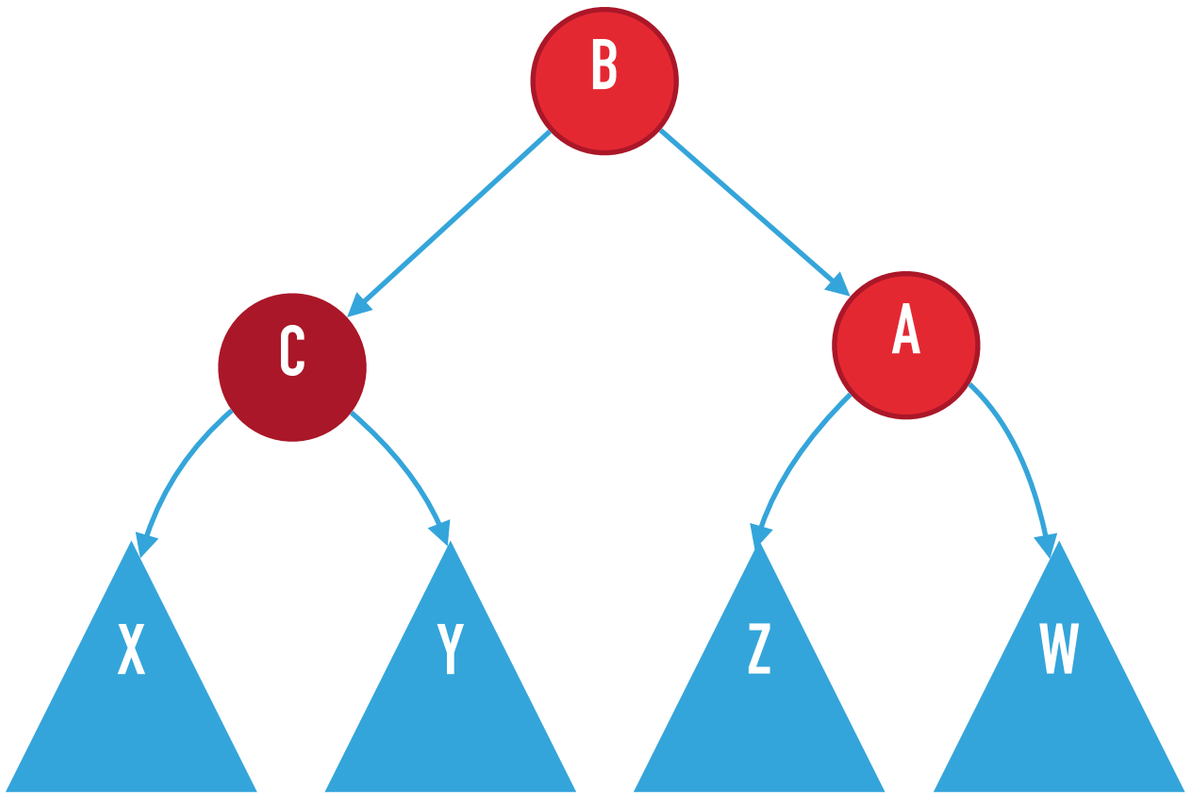
CASO ZIG ZIG

Il nodo da muovere è figlio sinistro di un nodo che è a sua volta figlio sinistro



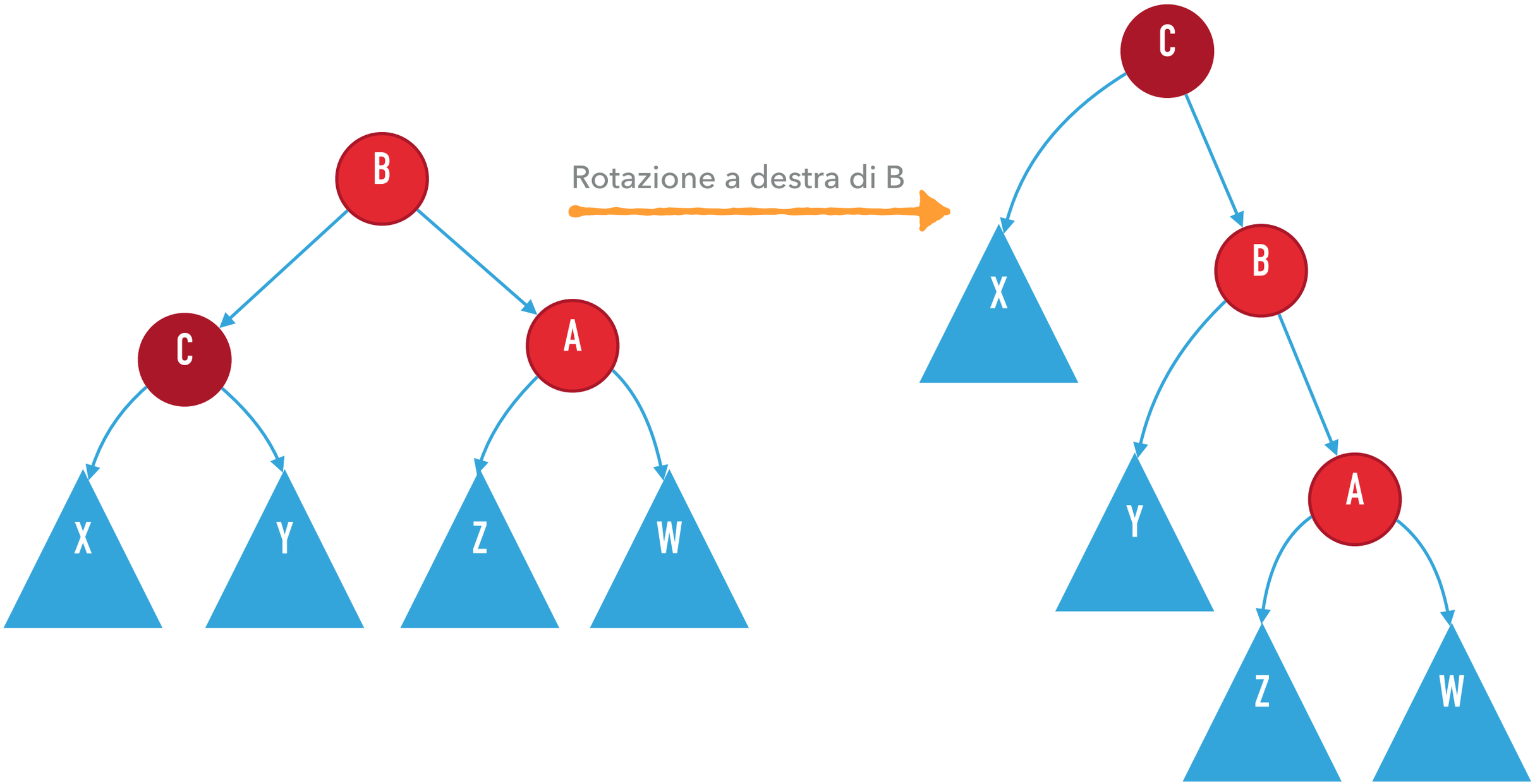
CASO ZIG ZIG

Il nodo da muovere è figlio sinistro di un nodo che è a sua volta figlio sinistro



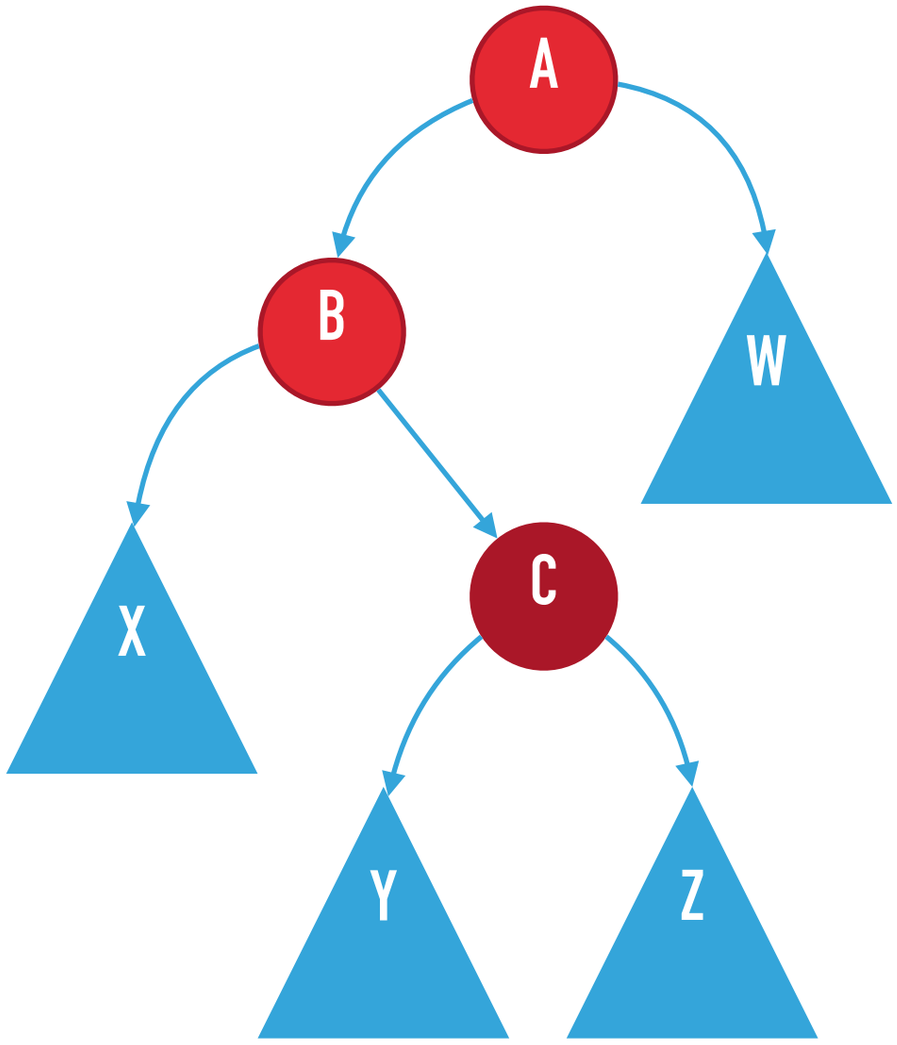
CASO ZIG ZIG

Il nodo da muovere è figlio sinistro di un nodo che è a sua volta figlio sinistro



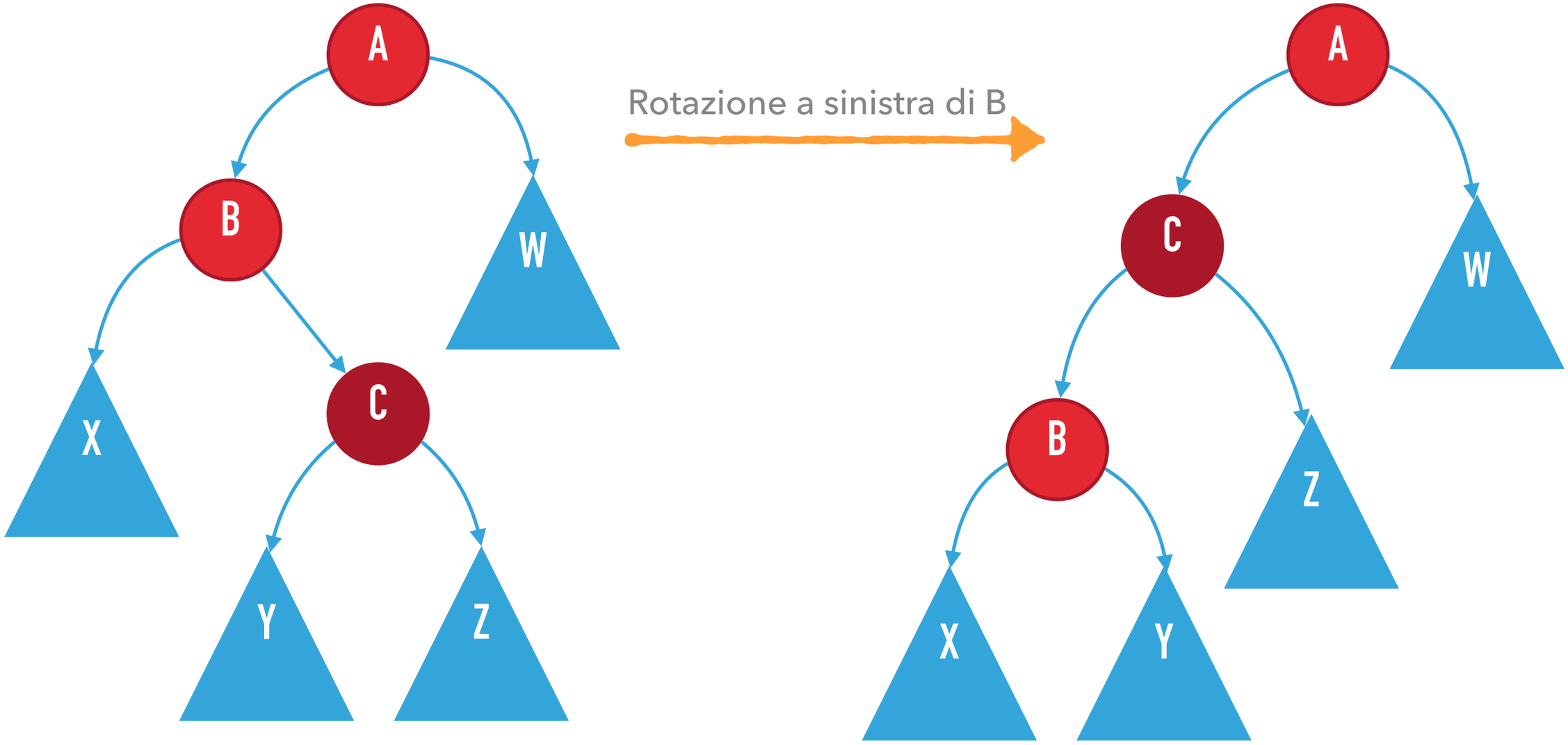
CASO ZIG ZAG

Il nodo da muovere è figlio destro di un nodo che è figlio sinistro



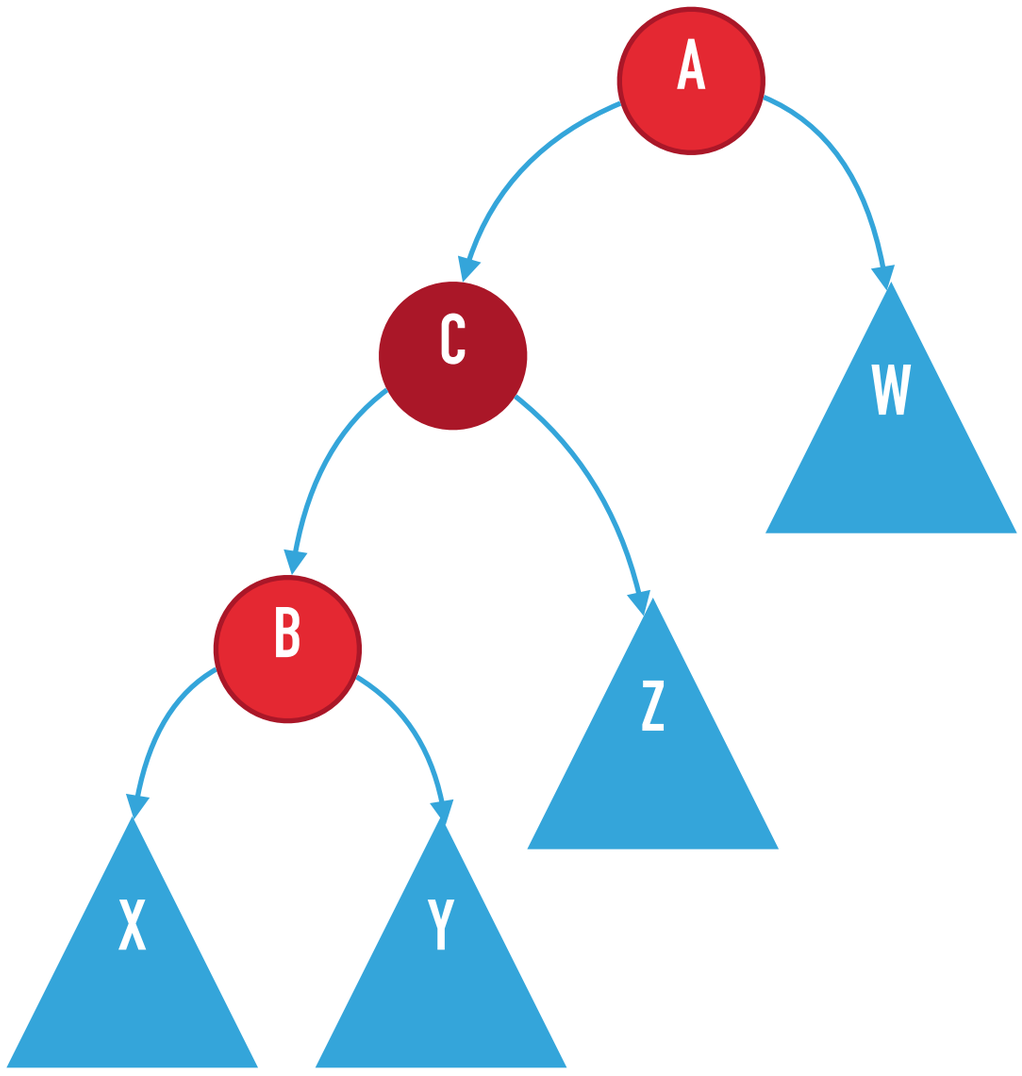
CASO ZIG ZAG

Il nodo da muovere è figlio destro di un nodo che è figlio sinistro



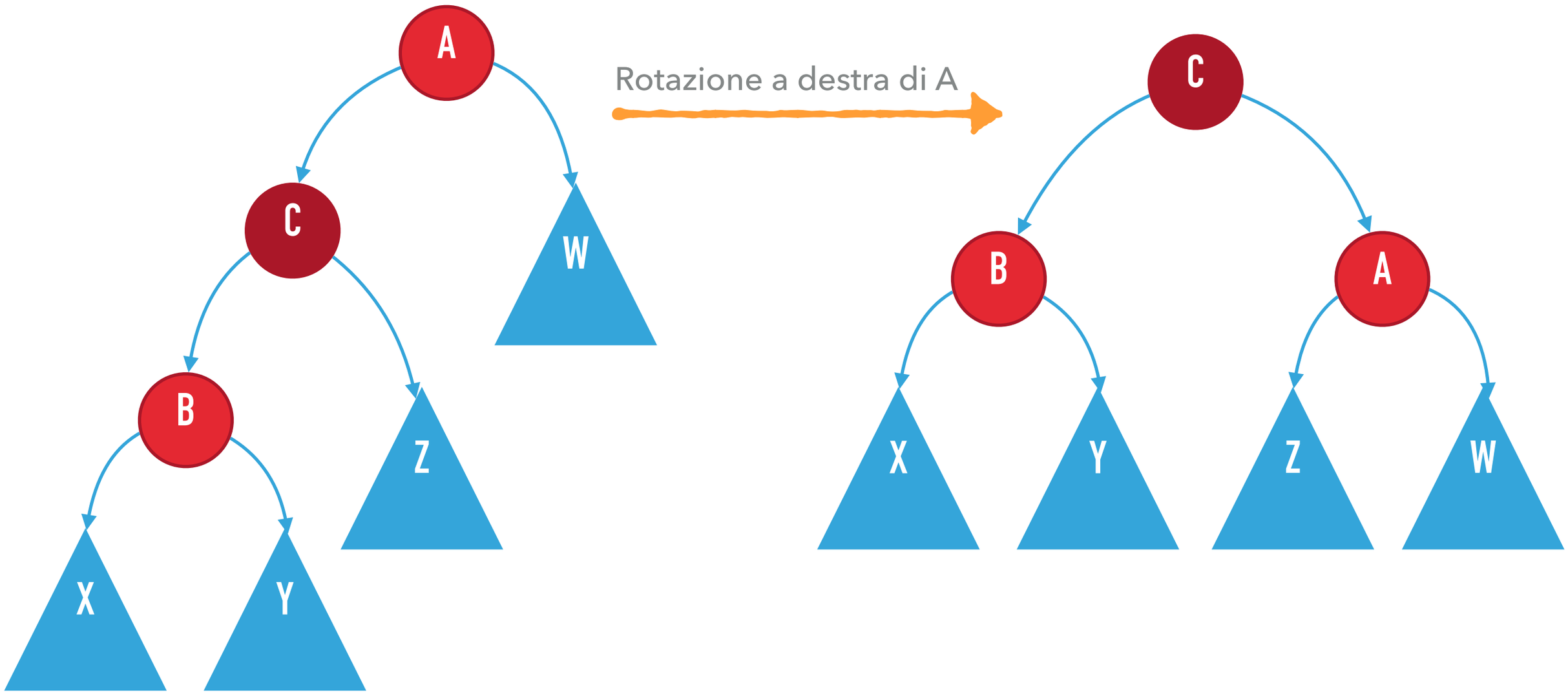
CASO ZIG ZAG

Il nodo da muovere è figlio destro di un nodo che è figlio sinistro



CASO ZIG ZAG

Il nodo da muovere è figlio destro di un nodo che è figlio sinistro



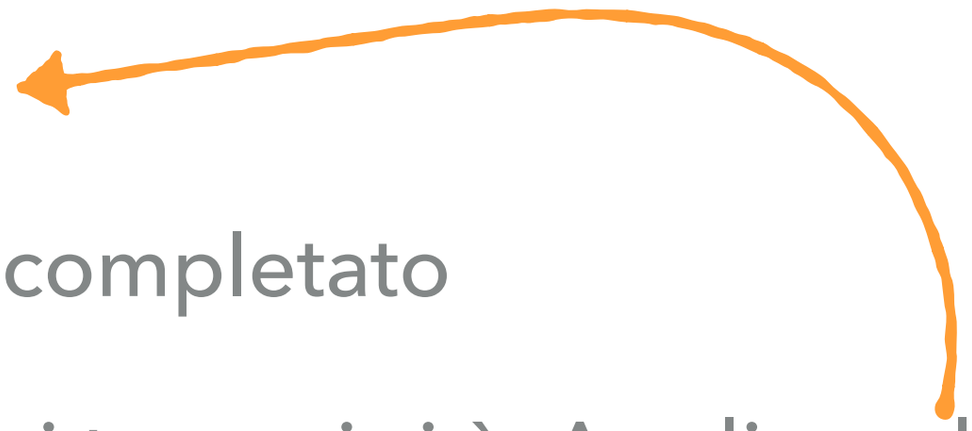
ALBERI SPLAY

ALBERI SPLAY

- Applicando uno tra questi tre casi (o i loro simmetrici) ad ogni passo possiamo spostare un nodo fino alla radice

ALBERI SPLAY

- Applicando uno tra questi tre casi (o i loro simmetrici) ad ogni passo possiamo spostare un nodo fino alla radice
- La struttura di base è:
  - Il nodo è alla radice?
    - Sì: allora abbiamo completato
    - No: vedi in quali dei tre casi si è. Applicare le rotazioni.



ALBERI SPLAY

ALBERI SPLAY

- Non vedremo una analisi accurata del tempo di calcolo delle operazioni di ricerca

ALBERI SPLAY

- Non vedremo una analisi accurata del tempo di calcolo delle operazioni di ricerca
- Esiste però il seguente teorema (**Balance Theorem)**
- Data una sequenza di m operazioni di ricerca in un albero splay di n elementi, il costo di effettuare la sequenza di operazioni è $O(m \log n + n \log n)$

ALBERI SPLAY

- Non vedremo una analisi accurata del tempo di calcolo delle operazioni di ricerca
- Esiste però il seguente teorema (**Balance Theorem)**
- Data una sequenza di m operazioni di ricerca in un albero splay di n elementi, il costo di effettuare la sequenza di operazioni è $O(m \log n + n \log n)$
- Questo significa che se facciamo almeno n operazioni il costo medio di ogni operazione è logaritmico