# LEZIONE 20: Temi: misura e integrale di Lebesgue.

<u>Spazi di funzioni</u> integrabili nella misura di Lebesgue.

$\boxed{L^1(\mathbb{R})}$ : $f \in L^1(\mathbb{R})$ se $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\, dt < +\infty$ , $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$f$ la chiamiamo "integrabile" o "sommabile"

Possiamo definire analogamente $L^1(E)$ per un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ misurabile, e.g. $L^1([a,b])$.

$\boxed{L^2(\mathbb{R})}$ : $f \in L^2(\mathbb{R})$ se $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |f(t)|^2 < +\infty$

$f$ è detta "a quadrato sommabile"

$L^1(\mathbb{R})$ e $L^2(\mathbb{R})$ sono spazi vettoriali di funzioni:

$f_1, f_2 \in L^1$ o $L^2$ $\Longrightarrow$ $\alpha f_1 + \beta f_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

è ancora $\in L^1$ o $L^2$.

Su questi spazi c'è una nozione di norma:

- $\| f \|_{L^1} := \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, |f(t)|$ per $f \in L^1(\mathbb{R})$
- $\| f \|_{L^2} := \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, |f(t)|^2 \right)^{1/2}}_{\text{la radice dell'integrale del quadrato}}$ per $f \in L^2(\mathbb{R})$

Proprietà della norma:

$\circledast$ $\|f\| \geq 0$, $\forall f$

$\|f\| = 0 \iff f = 0$ (PRECISAZIONE)

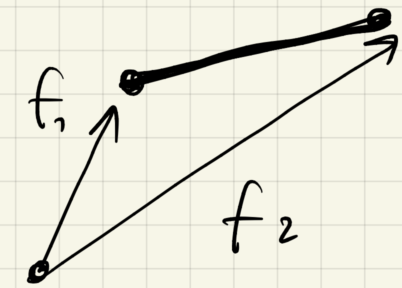
$\circledast$ $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

$\circledast$ $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

La norma indica la "grandezza" di una funzione, va pensata come la lunghezza di un vettore in $\mathbb{R}^N$.

Permette di definire una distanza:

$$\mathrm{dist}(f_1, f_2) = \|f_1 - f_2\|$$




<u>PRECISAZIONE</u>: $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$.

Richiede che in $L^1$ e $L^2$ identifichiamo due funzioni se differiscono solo su un insieme di misura nulla. Ad es: non distinguiamo $\chi_{\mathbb{Q}}(x)$ dalla funzione nulla. Ogni $f \in L^1$ o $L^2$ quindi è in realtà una classe di equivalenza di funzioni.

Proprietà notevole di questi spazi vettoriali con norme:

sono completi → "Spazi di Banach"

= Una qualsiasi successione di Cauchy rispetto alla norma ammette un limite.

(Cauchy: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ t.c.

$$\| f_n - f_m \| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N \quad )$$

i punti della successione $f_n(x)$ sono sempre più vicini all'aumentare di $n$.

Completo: tutte le successioni fatte così hanno un limite interno all'insieme

Inoltre le funzioni continue e sommabili / a quadrato sommabile sono dense in $L^1 / L^2$.

Sottoinsieme denso di uno spazio vettoriale con norma: qualsiasi elemento dello spazio vettoriale è arbitrariamente vicino a un elemento del sottoinsieme.

$\forall f \in L^1 / L^2$ può essere approssimata in norma $L^1$ o $L^2$ arbitrariamente bene da una funzione continua, ovvero $\forall \varepsilon > 0$, $\exists F$ continua e in $L^1/L^2$ tale che:

$$\| F - f \| < \varepsilon.$$

REF: * Completezza di $L^1$: esempio 2.8.1 di Bagarello;
* Capitolo 3 di Rudin II volume: "Real & Complex Analysis";
* Capitolo 6 di Petrini, Pradisi e Zaffaroni; Cap. 2 di Bagarello.

Definire la trasformata di Fourier. Cominciamo dal definirla per funzioni $\in L^1(\mathbb{R})$.

$f \in L^1(\mathbb{R})$ Trasformata di Fourier:

$$\boxed{\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t}}$$

$\mathcal{F}[f]$ $\rightarrow$ notazione che mette l'accento sul fatto che stiamo mappando una funzione in una nuova funzione.

$\mathcal{F}$: "funzione di funzioni"

$\mathcal{F}$ è ben definita su $L^1(\mathbb{R})$ perché se $f \in L^1(\mathbb{R})$, anche $f(t)e^{i\omega t} \in L^1(\mathbb{R})$ per $\forall\, \omega \in \mathbb{R}$. Questo semplicemente perché:

$$|f(t)\, e^{i\omega t}| = |f(t)|$$

Quindi l'integrale che definisce la trasformata converge assolutamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |f(t)\, e^{i\omega t}| = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |f(t)| < +\infty$$

per definizione di $L^1(\mathbb{R})$.

Proprietà: * $\mathcal{F}$ è lineare

$$\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \mathcal{F}[f] + \beta \mathcal{F}[g]$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $f, g \in L^1(\mathbb{R})$

* $\mathcal{F}[f]$ è una funzione limitata di $\omega \in \mathbb{R}$

Dim:
$$|\mathcal{F}[f](\omega)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t)\, e^{i\omega t} \right|$$
$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |f(t)| = \|f\|_{L^1} < +\infty, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

* Traslazione: $f(t) \longmapsto T_a[f](t) = f(t+a)$
$a \in \mathbb{R}$

- $\mathcal{F}[T_a[f]](\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f](\omega)$.

traslazione $\longmapsto$ moltiplicazione per una fase.

$$\bullet \quad \mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = \mathcal{F}[f](\omega + a)$$

moltiplicazione per una fase $\longmapsto$ traslazione

<u>Dim:</u> $\bullet \quad \mathcal{F}[T_a[f]](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, e^{i\omega t} f(t+a)$

$$\underset{\substack{t' = t+a \\ t = t'-a}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, e^{i\omega(t'-a)} f(t')$$

$$e^{i\omega(t'-a)} = e^{i\omega t'} e^{-i\omega a}$$

$$= e^{-i\omega a} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \, e^{i\omega t'} f(t') = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f](\omega).$$

$$\bullet \quad \mathcal{F}[e^{iat} f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, e^{i\omega t} \, e^{iat} f(t)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, e^{i(\omega+a)t} f(t) = \mathcal{F}[f](\omega + a).$$

* $\mathcal{F}[f]$ è una funzione continua di $\omega$

<u>Dim</u>: $$|\hat{f}(\omega+\varepsilon)-\hat{f}(\omega)| \qquad (\hat{f}(\omega)=\mathcal{F}[f](\omega))$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |e^{i\varepsilon t}-1|\,|f(t)|$$

• 1 $$|e^{i\varepsilon t}-1|\,|f(t)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0, \quad \forall t$$

• 2 $$|e^{i\varepsilon t}-1|\,|f(t)| \leq (|e^{i\varepsilon t}|+|-1|)\,|f(t)|$$
$$= \underbrace{2\,|f(t)|} \leftarrow \text{integrabile perché } f\in L^1(\mathbb{R}).$$

1+2 ci permettono di concludere, grazie al TCD, che possiamo portare il limite $\varepsilon\to 0$ dentro l'integrale e quindi: $$|\hat{f}(\omega+\varepsilon)-\hat{f}(\omega)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad ✓ .$$

Riassunto finora: $\mathcal{F}: \underbrace{L^1(\mathbb{R})} \longrightarrow \underbrace{C^0(\mathbb{R})}$

funzioni continue e limitate

$\mathcal{F}$ mappa lineare tra i due spazi vettoriali.

Entrambi questi spazi vettoriali anche anche un prodotto:

•) $C^0 \times C^0 \longmapsto C^0$

$(f, g) \longmapsto f \cdot g$ se $f$ e $g$ sono continue e limitate, anche il prodotto punto per punto lo è.

•) $L^1 \times L^1 \longmapsto L^1$ PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

$$f, g \in L^1(\mathbb{R}) \longmapsto (f * g)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(t')\, g(t - t')$$

la somma deve fare $t$.

Mostriamo che in effetti $(f*g)(t)$ è in $L^1(\mathbb{R})$.

$f(t')\, g(t-t')$ è misurabile su $\mathbb{R}^2_{(t,t')}$

e $\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, |f(t')|\, |g(t-t')|}$

teorema di Fubini-Tonelli $\Rightarrow$ ordine non conta!

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, |f(t')| \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |g(t-t')| = \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, |f(t')| \cdot \|g\|_{L^1}$$

$$= \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$$

[ $f(t')$ non dipende da $t$ ]

[ Notiamo che: $\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, |g(t-t')| = \|g\|_{L^1}$ ]

$< \infty$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(t')\, g(t-t') = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, (f*g)(t)$$ Converge assolutamente

$\Rightarrow (f*g)(t)$ è $< \infty$ a meno di un insieme di misura nulla.

$$\|f*g\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(t')\, g(t-t') \right|$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, |f(t')|\, |g(t-t')| \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

portiamo $|\cdot|$ dentro $\int dt'$

$\Rightarrow (f*g) \in L^1(\mathbb{R})$.

Osservazione: se $f \in L^1$, $g \in L^1$

$f \cdot g \notin L^1$ necessariamente.

E.g. $\dfrac{1}{\sqrt{|x|}\,(1+x^2)} \in L^1$ $\quad x \to \infty$: $x^{-5/2}$ ✓ $\quad x \to 0$: $x^{-1/2}$ ✓

però il suo quadrato NON è integrabile in 0.

* Vale che: $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \cdot \mathcal{F}[g]$

prodotto su $L^1$ — prodotto su $C^0$

<u>Dim</u>: $\mathcal{F}[f*g](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \, e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f(t') g(t-t')$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' f(t') \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} dt \, e^{i\omega t} g(t-t')}$$

trasformata di Fourier di una funzione traslata

possiamo scambiare gli integrali $|f(t')||g(t-t')|$ è integrabile in $t$ e $t'$.

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dt' f(t') e^{i\omega t'}}_{\hat{f}(\omega)} \hat{g}(\omega)$$

$$= \hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega).$$

Su $L^1$ abbiamo la norma $\|f\|_{L^1} = \int dt \, |f(t)|$

anche su $C^0$ possiamo definire la norma:

$$\hat{f} \in C^0 \quad , \quad \|\hat{f}\|_{C^0} \equiv \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)| < +\infty$$

* $\mathcal{F}$ è compatibile con queste nozioni di norma, ovvero è una <u>funzione</u> <u>continua</u> tra i due spazi vettoriali normati:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta \ t.c. \quad \|f-g\|_{L^1} < \delta \Rightarrow \|\hat{f} - \hat{g}\|_{C^0} < \varepsilon.$$

Segue semplicemente dalla dimostrazione fatta prima della limitatezza, applicata a $f-g$:

$$|\hat{f}(\omega) - \hat{g}(\omega)| \leq \|f-g\|_{L^1} \Rightarrow \|\hat{f}-\hat{g}\|_{C^0} \leq \|f-g\|_{L^1}.$$

* $\mathcal{F}$ scambia la derivata e la moltiplicazione per la variabile :

Se $t^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$ per una certa $f \in L^1(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \mathcal{F}[f](\omega) \in C^k$ : è derivabile $k$ volte in maniera continua

e vale :

1) $$\boxed{\left(\frac{d}{d\omega}\right)^k \mathcal{F}[f](\omega) = i^k \mathcal{F}[t^k f(t)]}$$

$$\left[\; it \longmapsto \frac{d}{d\omega} \;\right]$$

Se inoltre $f \in L^1(\mathbb{R})$ è tale che $\left(\frac{d}{dt}\right)^k f(t) \in L^1(\mathbb{R})$

$$\Longrightarrow \quad 2) \quad \boxed{\mathcal{F}\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^k f(t)\right](\omega) = (-i\omega)^k \, \mathcal{F}[f(t)](\omega)}$$

$$\left[\ \frac{d}{dt} \longmapsto -i\omega \ \right]$$

Per mostrare queste proprietà:

1) Bisogna portare il limite del rapporto incrementale dentro l'integrale; si può fare usando il TCD.

2) Basta integrare per parti: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} \frac{df}{dt}$

$$= f(t)\, e^{i\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{i\omega t} f(t)$$

va a 0 perché $f \in L^1$ e $\frac{df}{dt} \in L^1$.